ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

A. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

C. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2002

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Α-1. *Να αποδειχθεί ότι σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:*

(i) $g(x,y) = 4x^2+y^2$, $R = \{(x,y): |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

(ii) $g(x,y) = x^3e^{-xy^2}$, $S = \{(x,y): 0\leq x\leq 1$, y *αυθαίρετο*$\}$.

(iii) $g(x,y) = \begin{cases} y(3x-1), & \text{αν } x\geq 0 \\ y(2x-1), & \text{αν } x<0 \end{cases}$, $S =\{(x,y): |x|\leq 1$, y *αυθαίρετο*$\}$.

(i) Η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχής στο R.

(ii) Είναι

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2x^4ye^{-xy^2} \quad \text{για } 0\leq x\leq 1,\ y\in\mathbb{R}.$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, εκτός του ότι είναι συνεχής, είναι και φραγμένη στο S.

(iii) Έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 3x-1, \text{ αν } x\geq 0,\ y\in\mathbb{R} \\ 2x-1, \text{ αν } x<0,\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

και επομένως η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο S.

Α-2. *Να αποδειχθεί ότι σε καθεμιά από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις η συνάρτηση g δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:*

(i) $g(x,y) = xy^2$, $S = \{(x,y): |x|\leq 1$, y *αυθαίρετο*$\}$.

(ii) $g(x,y) = e^xy^{2/3}$, $R = \{(x,y): |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

(i) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο S. Τότε θα υπάρχει μια σταθερά $K>0$ έτσι ώστε

$$|g(x,y)-g(x,z)| \leq K|y-z| \text{ για όλα τα } (x,y), (x,z) \in S.$$

Έτσι, θα έχουμε

$$|g(1,\delta)-g(1,\delta/2)| \leq K|\delta-\delta/2| \text{ για κάθε } \delta>0,$$

δηλαδή

$$3\delta \leq 2K \text{ για όλα τα } \delta>0,$$

το οποίο είναι ένα άτοπο.

(ii) Έστω ότι η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R με σταθερά $K>0$. Τότε ισχύει

$$|g(x,y)-g(x,z)| \leq K|y-z| \text{ για όλα τα } (x,y), (x,z) \in R.$$

Επομένως

$$|g(0,\delta)-g(0,0)| \leq K|\delta-0| \text{ για κάθε } \delta\in(0,1],$$

δηλαδή

$$1 \leq K\delta^{1/3} \text{ για όλα τα } \delta\in(0,1],$$

το οποίο είναι αδύνατο.

A-3. *Να αποδειχθεί ότι καθένα από τα παρακάτω δύο προβλήματα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο σημειούμενο διάστημα:*

(i) $y' = 1+y+y^2\cos x,\ y(0) = 0\ ;\ I = [-1/3, 1/3].$

(ii) $y' = (4y+e^{-x^2})e^{2y},\ y(0) = 0\ ;\ I = \left[-\dfrac{1}{8\sqrt{e}}, \dfrac{1}{8\sqrt{e}}\right].$

(i) Ας είναι

$$R = \left\{(x,y): |x| \leq \frac{1}{3},\ |y| \leq b\right\},$$

όπου b είναι ένας θετικός αριθμός. Η συνάρτηση f με $f(x,y) = 1+y+y^2\cos x$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο R. Ακόμα, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R, γιατί η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+b+b^2>0.$$

Ας είναι

$$r = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{b}{1+b+b^2}\right\}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα [-r,r]. Επιλέγοντας b=1, έχουμε r=1/ 3. Έτσι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο [-1/ 3,1/ 3].

(ii) Ας είναι b ένας θετικός αριθμός και ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο

$$R = \left\{(x,y): |x| \le \frac{1}{8\sqrt{e}},\ |y| \le b\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με $f(x,y) = (4y+e^{-x^2})e^{2y}$ είναι συνεχής στο R και άρα η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R. Είναι

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = (4b+1)e^{2b}>0.$$

Ας θέσουμε

$$r = \min\left\{\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{b}{(4b+1)e^{2b}}\right\}.$$

Για b=1/ 4, παίρνουμε $r = \frac{1}{8\sqrt{e}}$. 'Αρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{1}{8\sqrt{e}}\right]$.

Α-4. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = y\log(1+|x|)+e^{-x}\log(1+y^2),\ y(0)=0$$

έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

(ii) *Το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = \frac{\cos y}{1-x^2},\ y(0)=-2$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (-1,1).

(i) Η συνάρτηση

$$f(x,y) = y\log(1+|x|)+e^{-x}\log(1+y^2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

είναι συνεχής. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \log(1+|x|)+e^{-x}\frac{2y}{1+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

και επομένως η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής . Επιπλέον, αν J είναι ένα συμπαγές διάστημα, έχουμε για όλα τα $(x,y) \in J\times\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \log(1+|x|)+e^{-x}\frac{2|y|}{1+y^2} \le \log(1+|x|)+e^{-x}$$

$$\leq \max_{x\in J} \left[\log(1+|x|)+e^{-x}\right],$$

δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J\times\mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\times\mathbb{R}$. 'Αρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

(ii) Η συνάρτηση f με

$$f(x,y) = \frac{\cos y}{1-x^2}\ , \quad (x,y) \in (-1,1)\times\mathbb{R}$$

είναι συνεχής. Συνεχής επίσης είναι και η $\frac{\partial f}{\partial y}$, αφού

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sin y}{1-x^2}\ , \quad (x,y) \in (-1,1)\times\mathbb{R}.$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι για κάθε συμπαγές διάστημα J με $J \subseteq (-1,1)$, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J\times\mathbb{R}$. 'Αρα, η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\times\mathbb{R}$ για κάθε συμπαγές υποδιάστημα J του (-1,1). Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο (-1,1).

A-5. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = f(x,y)\ , \quad y(0)=0,$$

όπου $f(x,y) = x+x^2y^4$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Να αποδειχθεί στη συνέχεια ότι, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η συνάρτηση* f *δεν πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο* $J\times\mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο $R = \{(x,y): |x| \leq a, |y| \leq b\}$, όπου $a>0$ και $b>0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R και άρα η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο ορθογώνιο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = a+a^2b^4>0.$$

Θέτουμε

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{a+a^2b^4}\right\}.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα [-r,r]. Θα βρούμε τώρα το μεγαλύτερο τέτοιο διάστημα. Για ένα δεδομένο a>0, η μέγιστη τιμή της παράστασης $b/(a+a^2b^4)$ λαμβάνεται για $b = 1/\sqrt[4]{3a}$ και είναι ίση με $3/(4a\sqrt[4]{3a})$. Τότε η μέγιστη τιμή του $r = \min\left\{a, 3/(4a\sqrt[4]{3a})\right\}$ είναι $\sqrt[9]{27/256}$ και λαμβάνεται για $a = \sqrt[9]{27/256}$. Έτσι, εκλέγοντας

$$a = \sqrt[9]{\frac{27}{256}} \text{ και } b = 1 \Bigg/ \sqrt[4]{3\sqrt[9]{\frac{27}{256}}} \quad ,$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα

$$I = \left[-\sqrt[9]{\frac{27}{256}}, \sqrt[9]{\frac{27}{256}}\right].$$

Ας είναι J ένα συμπαγές διάστημα και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\times\mathbb{R}$. Τότε θα υπάρχει μια σταθερά K>0 έτσι ώστε

$$|f(x,y)-f(x,z)| \le K|y-z| \quad \text{για όλα τα } x \in J,\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}.$$

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x_0 \in J$ με $x_0 \neq 0$. Θα έχουμε

$$|f(x_0,y)-f(x_0,0)| \le K|y-0| \quad \text{για κάθε } y>0,$$

δηλαδή

$$x_0^2y^3 \le K \quad \text{για όλα τα } y>0,$$

που είναι ένα άτοπο. Επομένως, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η f δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\times\mathbb{R}$.

Α-6. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = 1+xy^2 \ , \ y(0)=0.$$

Θεωρούμε δύο αριθμούς a>0, b>0 και θέτουμε

$$R = \{(x,y): |x|\le a, |y|\le b\}.$$

Η συνάρτηση f με $f(x,y) = 1+xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο R. Επίσης, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R, αφου η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R. Είναι

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+ab^2 > 0.$$

Ας είναι

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{1+ab^2}\right\}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα [-r,r]. Για ένα δεδομένο a>0, η παράσταση $b/(1+ab^2)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της $1/2\sqrt{a}$ για $b=1/\sqrt{a}$. Η μέγιστη τιμή του $r = \min\left\{a, 1/2\sqrt{a}\right\}$ λαμβάνεται για $a = 1/\sqrt[3]{4}$ και είναι ίση με $1/\sqrt[3]{4}$. Έτσι, επιλέγοντας

$$a = 1/\sqrt[3]{4} \quad \text{και} \quad b = \sqrt[3]{2},$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4}\right]$.

Α-7. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y_1'' = x^2y_1' + x^4y_1 + y_2,\ y_2' = e^x y_1 - y_2\ ;\ y_1(1)=2,\ y_1'(1)=0,\ y_2(1)=-1.$$

Θέτοντας $y_1=u_1$, $y_1'=u_2$, $y_2=u_3$, το πρόβλημα αρχικών τιμών μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

$$u_1' = u_2,\ u_2' = x^2u_2 + x^4u_1 + u_3,\ u_3' = e^x u_1 - u_3\ ;$$
$$u_1(1)=2,\ u_2(1)=0,\ u_3(1)=-1.$$

Αυτό γράφεται και ως εξής

$$u' = Au\ ,\ u(1) = u_0\ ,$$

όπου

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^4 & x^2 & 1 \\ e^x & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbf{R},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ και } u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών που δόθηκε έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

Α-8. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y_1' = 1 + xy_2^2,\ y_2' = xy_1^2\ ;\ y_1(0)=y_2(0)=0.$$

Ας θέσουμε

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ και } f(x,y) \equiv f(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1+xy_2^2 \\ xy_1^2 \end{pmatrix} \text{ για } (x,y) \in \mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}^2.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών παίρνει τότε τη μορφή

$$y' = f(x,y),\ y(0) = 0.$$

Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο

$$R = \{(x,y): |x| \le a,\ |y| \le b\},$$

όπου $a>0$, $b>0$ είναι σταθερές. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, αφού οι $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ και $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R, η f θα πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο ορθογώνιο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+ab^2 > 0.$$

Ας θέσουμε

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{1+ab^2}\right\}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r, r]$. Θα βρούμε το μέγιστο τέτοιο διάστημα. Για ένα δεδομένο $a>0$, η παράσταση $b/(1+ab^2)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της $1/2\sqrt{a}$ όταν $b=1/\sqrt{a}$. Τώρα, το $r = \min\{a, 1/2\sqrt{a}\}$ γίνεται μέγιστο για $a = 1/\sqrt[3]{4}$ και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι $r = 1/\sqrt[3]{4}$. Έτσι, επιλέγοντας

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad b = \sqrt[3]{2},$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4}\right]$.

A-9. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = x\sqrt{1+x^2+y^2},\quad y(0) = 0.$$

Η συνάρτηση f με

$$f(x, y) = x\sqrt{1+x^2+y^2},\quad (x, y)\in \mathbf{R}^2$$

είναι συνεχής. Ακόμα, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}^2$ αφού

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ας είναι J ένα συμπαγές διάστημα. Τότε έχουμε για όλα τα $(x, y) \in J x \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{1+x^2+y^2}} < |x| \leq \max_{t \in J} |t|$$

και επομένως η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J x \mathbb{R}$. Άρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Β. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Β-1. *Ας είναι* f *μια συνάρτηση στο διάστημα* $(0,\infty)$ *που δεν μηδενίζεται σε* n *τουλάχιστον σημεία. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_k(x) = x^{k-1}f(x),\ x\in(0,\infty)\quad (k=1,\dots,n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας υποθέσουμε ότι $c_1f_1+\dots+c_nf_n=0$, όπου c_k $(k=1,\dots,n)$ είναι σταθερές.Τότε

$$\left(c_1+c_2x+\dots+c_nx^{n-1}\right)f(x)=0 \text{ για όλα τα } x>0.$$

Ας είναι x_k $(k=1,\dots,n)$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του διαστήματος $(0,\infty)$ στα οποία η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Τότε

$$\begin{cases} c_1+c_2x_1+\dots+c_nx_1^{n-1}=0 \\ c_1+c_2x_2+\dots+c_nx_2^{n-1}=0 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ c_1+c_2x_n+\dots+c_nx_n^{n-1}=0\ . \end{cases}$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους $c_1, c_2, \dots, c_n$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $c_1=c_2=\dots=c_n=0$, αφού η ορίζουσά του είναι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}(x_i-x_j) \neq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει τη γραμμική ανεξαρτησία των f_k $(k=1,\dots,n)$.

B-2. *Με τη βοήθεια της αντικατάστασης* $y = ze^{x^2}$, *να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''-4xy'+(4x^2-1)y = e^{x^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$y' = (z'+2xz)e^{x^2}$$

και

$$y'' = \left[z''+4xz'+(2+4x^2)z\right]e^{x^2}$$

και έτσι η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z''+z = 1.$$

Οι λύσεις αυτής δίνονται από τον τύπο

$$z(x) = c_1\cos x+c_2\sin x+1,\ \ x \in \mathbb{R},$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. 'Αρα, όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = (c_1\cos x+c_2\sin x+1)e^{x^2},\ \ x \in \mathbb{R}\ \ (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-3. *Να επιλυθεί η ομογενής διαφορική εξίσωση*

$$y^{(5)}-y'-\frac{4}{x}y = 0\ ,\ \ x>0$$

με τις αντικαταστάσεις $y=xz$, $z^{(4)}-z=w$.

Ας ονομάσουμε (Ε) τη διαφορική εξίσωσή μας. Κάνουμε την αντικατάσταση $y=zx$ για $x>0$. Τότε έχουμε για όλα τα $x>0$

$$y' = xz'+z \ \text{ και } \ y^{(5)}=xz^{(5)}+5z^{(4)}.$$

'Ετσι, η (Ε) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$xz^{(5)}+5z^{(4)}-xz'-5z = 0,$$

η οποία γράφεται ως

$$x\left[z^{(4)}-z\right]'+5\left[z^{(4)}-z\right] = 0.$$

Με την αντικατάσταση $z^{(4)}-z = w$, η τελευταία διαφορική εξίσωση γίνεται

$$xw'+5w = 0,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$w(x) = c/x^5\ ,\ \ x>0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. 'Ετσι, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

(E*) $$z^{(4)}-z = c/x^5 \quad , x>0.$$

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση της (E*) έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$z_1(x)=e^x,\ z_2(x)=e^{-x},\ z_3(x)=\cos x,\ z_4(x)=\sin x \text{ για } x>0.$$

Τώρα, για κάθε x>0, έχουμε

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & z_3(x) & z_4(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & z_3'(x) & z_4'(x) \\ z_1''(x) & z_2''(x) & z_3''(x) & z_4''(x) \\ z_1'''(x) & z_2'''(x) & z_3'''(x) & z_4'''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -8,$$

$$W_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ 0 & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ 0 & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ 1 & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -2e^{-x},$$

$$W_2(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & 0 & \cos x & \sin x \\ e^x & 0 & -\sin x & \cos x \\ e^x & 0 & -\cos x & -\sin x \\ e^x & 1 & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = 2e^{x},$$

$$W_3(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & 0 & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & 0 & \cos x \\ e^x & e^{-x} & 0 & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & 1 & -\cos x \end{pmatrix} = -4\sin x,$$

$$W_4(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & 0 \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & 0 \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & 0 \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & 1 \end{pmatrix} = 4\cos x.$$

'Αρα, μια μερική λύση της (E*) είναι για x>0

$$z_\mu(x) = \sum_{k=1}^{4} z_k(x) \int_1^x \frac{W_k(t)}{W(t)} \frac{c}{t^5}\,dt$$

$$= \frac{c}{4} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5}\,dt - \frac{c}{4} e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t^5}\,dt + \frac{c}{2} \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5}\,dt - \frac{c}{2} \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5}\,dt.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της (Ε) θα δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x\left[c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+c_5\left(e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5}\,dt - e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t^5}\,dt + 2\cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5}\,dt - 2\sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5}\,dt\right)\right]$$

για x>0, όπου c_i (i=1, . . . , 5) είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-4. *Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$y_1(x) = e^{-x^2/2},\ x > 0 \quad \textit{και} \quad y_2(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\,dt,\ x > 0$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+xy'+y = 0\ ,\ x > 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+xy'+y = 0\ ;\ y(1)=1/\sqrt{e},\ y'(1)=-1/\sqrt{e}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{-x^2/2} & e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\,dt \\ -xe^{-x^2/2} & -xe^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\,dt + 1 \end{pmatrix} = e^{-x^2/2} \neq 0$$

για όλα τα x > 0. 'Αρα, $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. Παρατηρούμε ότι $y_1(1)=1/\sqrt{e}$ και $y_1'(1)=-1/\sqrt{e}$.. 'Αρα, η y_1 είναι η (μοναδική) λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

B-5. *Με τον μετασχηματισμό* $x = \mathrm{tg}\frac{t}{2}$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y = 0\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

'Εχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\ ,\ \text{ήτοι}\ \ (1+x^2)y' = 2\frac{dy}{dt}$$

και

$$y''\equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y}{dt^2}\ ,$$

ήτοι

$$(1+x^2)^2y'' = -4x\frac{dy}{dt} + 4\frac{d^2y}{dt^2}.$$

'Ετσι, η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\ ,$$

η οποία έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $\cos t$, $t \in \mathbb{R}$ και $\sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Τώρα, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις

$$y(x) = \cos(2\mathrm{Artg}x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}\quad \text{και}\quad y_2(x) = \sin(2\mathrm{Artg}x) = \frac{2x}{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1\frac{1-x^2}{1+x^2} + c_2\frac{2x}{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ \ (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-6. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\omega^2y = A\cos\omega x,\ x\geq 0,$$

όπου ω *και* A *είναι θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση* y *αυτής είναι*

$$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = \infty.$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1.$$

Ας ονομάσουμε (Ε) τη διαφορική μας εξίσωση και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση αυτής. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0) είναι οι

$$y_1(x) = \cos\omega x,\ x\geq 0 \ \text{και}\ y_2(x) = \sin\omega x,\ x\geq 0.$$

Έχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = \omega > 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin\omega x \\ 1 & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = -\sin\omega x,$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & 0 \\ -\omega\sin\omega x & 1 \end{pmatrix} = \cos\omega x.$$

Έτσι, μια μερική λύση της (Ε) είναι για $x\geq 0$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt$$

$$= -\frac{A}{\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin\omega t\cos\omega t\,dt + \frac{A}{\omega}\sin\omega x\int_0^x \cos^2\omega t\,dt$$

$$= -\frac{A}{2\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin 2\omega t\,dt + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\int_0^x (\cos 2\omega t+1)\,dt$$

$$= \frac{A}{2\omega}\cos\omega x\left[\frac{1}{2\omega}(\cos 2\omega x-1)\right] + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\left(\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega x+x\right).$$

Τελικά, βρίσκουμε

$$y_\mu(x) = \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0.$$

Όλες, λοιπόν, οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y = c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x+\frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Έτσι, για μια τυχούσα λύση y, έχουμε για όλα τα $\nu=1,2,\ldots$

$$\left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| = \left|c_2(-1)^{\nu-1}+\frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1)(-1)^{\nu-1}\right|$$

$$\geq -|c_2| + \frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1),$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| = \infty.$$

'Αρα, για κάθε λύση y της (E) ισχύει

$$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = \infty.$$

Τέλος, για τη λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0)=0$, $y_0'(0)=1$, βρίσκουμε $c_1=0$ και $c_2=1/\omega$ και άρα είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x = \frac{1}{\omega}\left(1+\frac{A}{2}x\right)\sin\omega x \quad \text{για } x\geq 0.$$

B-7. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+a_1y'+a_0y = b(x),\ x\geq 0,$$

όπου a_1, a_0 *είναι σταθερές και* b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[0,\infty)$. *Ας είναι* r_1, r_2 *οι ρίζες του πολυωνύμου* $r^2+a_1r+a_0$ *με* $r_1\neq r_2$ *και ας υποθέσουμε ότι* $\mathrm{Re}r_1<0$, $\mathrm{Re}r_2<0$. *Να αποδειχθεί ότι: Αν η* b *είναι φραγμένη, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.*

Ας είναι $r_1=\alpha_1+i\beta_1$, $r_2=\alpha_2+i\beta_2$, όπου α_1, β_1, α_2, β_2 είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$ και $(\alpha_1,\beta_1)\neq(\alpha_2,\beta_2)$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = e^{r_1x} = e^{\alpha_1x}(\cos\beta_1x+i\sin\beta_1x),\ x\geq 0\ ;$$
$$y_2(x) = e^{r_2x} = e^{\alpha_2x}(\cos\beta_2x+i\sin\beta_2x),\ x\geq 0\ .$$

Επειδή $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$, θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_2(x) = 0$$

και άρα όλες οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$ και επομένως είναι φραγμένες. Αρκεί, λοιπόν, να διαπιστωθεί ότι υπάρχει μια φραγμένη μερική λύση, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση b είναι φραγμένη.

'Εχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x}\end{pmatrix} = (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{r_2x} \\ 1 & r_2e^{r_2x}\end{pmatrix} = -e^{r_2x}\ ,$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & 0 \\ r_1e^{r_1x} & 1\end{pmatrix} = e^{r_1x}\ .$$

'Ετσι, μια μερική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι για $x\geq 0$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, b(t)dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, b(t)dt$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2} e^{r_1x}\int_0^x e^{-r_1t}\, b(t)dt + \frac{1}{r_2-r_1} e^{r_2x}\int_0^x e^{-r_2t}\, b(t)dt.$$

Ας υποθέσουμε ότι η b είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια σταθερά $K>0$ έτσι ώστε $|b(x)|\leq K$ για όλα τα $x\geq 0$. Έτσι, για κάθε $x\geq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|r_1-r_2||y_\mu(x)| &\leq |e^{r_1x}|\int_0^x |e^{-r_1t}|\, |b(t)|dt + |e^{r_2x}|\int_0^x |e^{-r_2t}|\, |b(t)|dt \\
&= e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\, |b(t)|dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\, |b(t)|dt \\
&\leq K\left(e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\, dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\, dt\right) \\
&= K\left[e^{\alpha_1x}\frac{1}{-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1x}-1\right) + e^{\alpha_2x}\frac{1}{-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2x}-1\right)\right] \\
&= K\left[\left(\frac{1}{-\alpha_1}+\frac{1}{-\alpha_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_1}e^{\alpha_1x}+\frac{1}{\alpha_2}e^{\alpha_2x}\right)\right] \\
&< K\left(\frac{1}{-\alpha_1}+\frac{1}{-\alpha_2}\right)
\end{aligned}$$

και άρα η μερική λύση y_μ είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-8. *Αν $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων και $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ είναι ένα σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, να αποδειχθεί ότι*

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = cW(y_1, \ldots, y_n),$$

όπου c είναι μια σταθερά.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωσή μας είναι

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y = 0,$$

όπου a_i $(i=0, 1, \ldots, n-1,n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $a_n(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Αφού $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων, θα ισχύει

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0.$$

Τώρα, με τη βοήθεια του τύπου του Liouville, έχουμε για όλα τα $x \in I$

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt\right]$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)} \left\{ W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt\right]\right\}$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)} W(y_1, \ldots, y_n)(x).$$

B-9. (i) *Δίνεται η ομογενής διαφορική εξίσωση*

(*) $$y''+py'+qy = 0,$$

όπου p, q *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *και η* p *έχει συνεχή παράγωγο στο* I. *Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση* (*όπου* $x_0 \in I$)

$$y(x) = u(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right], x \in I$$

μετασχηματίζει την (*) *στην εξίσωση*

(**) $$u''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)u = 0.$$

Ακόμα, αν $\{u_1, u_2\}$ *είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της* (**), *τότε οι συναρτήσεις*

$$y_i(x) = u_i(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right], x \in I \quad (i=1,2)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (*).

(ii) *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y''+(2x+1)y'+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)y = 0, x \in [0,1].$$

(i) Για κάθε $x \in I$, έχουμε

$$y'(x) = \left[u'(x)-\frac{1}{2}p(x)u(x)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right]$$

και

$$y''(x) = \left\{u''(x)-p(x)u'(x)+\left[-\frac{1}{2}p'(x)+\frac{1}{4}p^2(x)\right]u(x)\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(t)dt\right].$$

Έτσι, μετά από τις πράξεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η δοθείσα αντικατάσταση μετασχηματίζει την (*) στην (**). Ας είναι, τώρα, $\{u_1, u_2\}$ένα βασικό σύνολο λύσεων της (**). Τότε οι y_1,y_2 είναι λύσεις της (*). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· ας υποθέσουμε ότι $c_1y_1+c_2y_2=0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Αυτό συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1=c_2=0$, αφού οι u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι, $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (*).

(ii) Η αντικατάσταση

$$y(x) = u(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}(2t+1)dt\right] = u(x)\,e^{-(x^2+x)/2},\ x\in[0,1]$$

μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση στην

$$u''+\left[\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}2-\frac{1}{4}(2x+1)^2\right]u = 0,$$

δηλαδή στην εξίσωση

$$u''-u = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$u_1(x) = e^{x},\ x\in[0,1]\ \text{και}\ u_2(x) = e^{-x},\ x\in[0,1].$$

Έτσι, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=u_1(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{(x-x^2)/2}\ \text{και}\ y_2(x)=u_2(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{-(x^2+3x)/2}\ \text{για}\ x\in[0,1]$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της διαφορικής μας εξίσωσης και άρα όλες οι λύσεις της δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{(x-x^2)/2}+c_2e^{-(x^2+3x)/2},\ x\in[0,1],$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Β-10. *Ας είναι y_1 και y_2 οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y = 0,\ x>0$$

(όπου α σταθερά) με

$$y_1(1)=1,\ y_1'(1)=0;\ y_2(1)=0,\ y_2'(1)=1.$$

Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.

Έχουμε

$$W(y_1, y_2)(1) = \det\begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Στη συνέχεια, με χρήση του τύπου του Liouville, παίρνουμε για κάθε x>0

$$W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(1)\exp\left(-\int_1^x \frac{t}{t^2}\,dt\right) = \exp\left(-\int_1^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}.$$

B-11. *Ας είναι* f *μια συνεχής συνάρτηση στο* $(0,\infty)$. *Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\frac{1}{4x^2}\,y = f(x)\cos x,\ x>0.$$

Ας συμβολίσουμε με (Ε) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση αυτής. Η (E_0) μπορεί να γραφεί ως

$$4x^2y''+y = 0.$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση Euler, η οποία με την αντικατάσταση t=logx, x>0 μετασχηματίζεται στην

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι οι $e^{t/2}$, $t \in \mathbf{R}$ και $te^{t/2}$, $t \in \mathbf{R}$. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{\log x/2}=\sqrt{x},\ x>0 \quad \text{και} \quad y_2(x)=\log x\, e^{\log x/2}=\sqrt{x}\log x,\ x>0$$

συνιστούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Τώρα, έχουμε για κάθε x>0

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x}\log x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x+\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = 1,$$

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x}\log x \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = -\sqrt{x}\log x,$$

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{x}.$$

'Ετσι, μια μερική λύση y_μ της (E) είναι

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt$$

$$= -\sqrt{x}\int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt + \sqrt{x}\log x\int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt$$

για $x>0$. Τέλος, όλες οι λύσεις της (E) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = \sqrt{x}\left[c_1 - \int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt\right] + \sqrt{x}\log x\left[c_2 + \int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt\right], x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-12. *Ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+y = b(x),\ x\geq 1,$$

όπου b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[1,\infty)$. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Μια μερική λύση είναι*

$$y_\mu(x) = \int_1^x \sin(x-t)b(t)dt,\ x\geq 1.$$

(ii) *Αν* $\int_1^\infty |b(x)|dx < \infty$, *τότε κάθε λύση είναι φραγμένη.*

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = \cos x,\ x\geq 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin x,\ x\geq 1.$$

Η ορίζουσα Wronski αυτών είναι

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1,\ x \geq 1.$$

Βρίσκουμε

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{pmatrix} = -\sin x,\ x \geq 1$$

και

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{pmatrix} = \cos x,\ x \geq 1.$$

Έτσι, μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)\, dt$$

$$= \cos x \int_1^x (-\sin t)b(t)dt + \sin x \int_1^x \cos t\, b(t)\, dt$$

$$= \int_1^x (-\cos x \sin t + \sin x \cos t)b(t)\, dt = \int_1^x \sin(x-t)b(t)\, dt\ ,\ x \geq 1.$$

Αν τώρα y είναι μια τυχούσα λύση της μη ομογενούς εξίσωσης, τότε θα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_\mu$ και άρα θα έχουμε για κάθε $x \geq 1$

$$|y(x)| \leq |c_1||\cos x| + |c_2||\sin x| + \int_1^x |\sin(x-t)||b(t)|dt$$

$$\leq |c_1| + |c_2| + \int_1^x |b(t)|dt \leq |c_1| + |c_2| + \int_1^\infty |b(t)|dt.$$

Αν λοιπόν ισχύει $\int_1^\infty |b(x)|dx < \infty$, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.

B-13. *Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει τις λύσεις*

$$y_1(x) = 1 + e^{x^2},\ \ y_2(x) = 1 + xe^{x^2}\ \ \textit{και}\ \ y_3(x) = (x+1)e^{x^2} + 1\ \ \ \textit{για}\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση. Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Ας καλέσουμε (E) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Οι συναρτήσεις

$$Y_1(x) = y_3(x)-y_1(x) = xe^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

και

$$Y_2(x) = y_3(x)-y_2(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

είναι λύσεις της (E_0). Οι Y_1, Y_2 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} xe^{x^2} & e^{x^2} \\ (1+2x^2)e^{x^2} & 2xe^{x^2} \end{pmatrix} = -e^{2x^2} \neq 0.$$

'Ετσι, όλες οι λύσεις της (E) δίνονται από τον τύπο $y=c_1Y_1+c_2Y_2+y_1$, δηλαδή

$$y(x) = (c_1x+c_2+1)e^{x^2}+1,\ x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τέλος, παρατηρούμε ότι $y_2(0)=y_2'(0)=1$. 'Αρα, η y_2 είναι η λύση της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

B-14. *Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y = 0,\ \ x\in(0,\pi),$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 *αυτής της μορφής* $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\alpha x)$, $x\in(0,\pi)$ (α *σταθερά*).

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχουμε

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin(\alpha x),$$

$$y_1'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(\alpha x)+\alpha x^{-1/2}\cos(\alpha x),$$

$$y_1''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}\sin(\alpha x)-\alpha x^{-3/2}\cos(\alpha x)-\alpha^2x^{-1/2}\sin(\alpha x).$$

Με την αντικατάσταση στην εξίσωση, βρίσκουμε ότι η y_1 είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$(1-\alpha^2)x^{3/2}\sin(\alpha x) = 0 \quad \text{για κάθε } x\in(0,\pi).$$

Δηλαδή, η y_1 είναι μια λύση τότε και μόνον τότε αν $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$. Επιλέγουμε $\alpha=1$ και έχουμε τη μερική λύση

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin x,\ x\in(0,\pi).$$

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^{-1/2}\sin x \quad \text{για } x\in(0,\pi).$$

Τότε για όλα τα $x\in(0,\pi)$ είναι

$$y'(x) = u'(x)x^{-1/2}\sin x + u(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x + x^{-1/2}\cos x\right),$$

$$y''(x) = u''(x)x^{-1/2}\sin x + u'(x)\left(-x^{-3/2}\sin x + 2x^{-1/2}\cos x\right)$$
$$+u(x)\left(\frac{3}{4}x^{-5/2}\sin x - x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\sin x\right).$$

'Ετσι, μετά από τις πράξεις, η εξίσωσή μας γίνεται

$$(\sin x)u'' + 2(\cos x)u' = 0.$$

Θέτοντας $u'=v$, καταλήγουμε στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(\sin x)v' + 2(\cos x)v = 0,$$

η οποία έχει τη λύση

$$v_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x\in(0,\pi).$$

Τότε η συνάρτηση

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{\pi/2}^{x} v_1(t)dt = x^{-1/2}\sin x \int_{\pi/2}^{x} \frac{dt}{\sin^2 t} = -x^{-1/2}\cos x,\ x\in(0,\pi)$$

είναι μια λύση της εξίσωσής μας τέτοια ώστε το $\{y_1,y_2\}$ να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. 'Ετσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x^{-1/2}(c_1\sin x + c_2\cos x),\ x\in(0,\pi),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-15. *Ας είναι* f *και* g *δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Αν οι* f *και* g *είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$.

(ii) *Αν* $W(f,g)(x)\neq 0$ *για κάποιο* $x\in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

(iii) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$, *τότε οι* f, g *δεν είναι αναγκαστικά γραμμικά εξαρτημένες.* (*Αντιπαράδειγμα:* $f(x)=x^2$, $x\in\mathbf{R}$ *και* $g(x)=x|x|$, $x\in\mathbf{R}$.)

(iv) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$ *και* $g(x)\neq 0$ *για όλα τα* $x\in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά εξαρτημένες.*

(i) Ας υποθέσουμε ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, όχι και οι δύο μηδέν, έτσι ώστε $c_1f+c_2g=0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_1 \neq 0$. Τότε, θέτοντας $\lambda = -c_2/c_1$, έχουμε $f = \lambda g$. Έτσι, παίρνουμε

$$W(f,g) = \det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda g & g \\ \lambda g' & g' \end{pmatrix} = 0.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in I$. Έστω ότι $c_1 f + c_2 g = 0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Τότε θα είναι και $c_1 f' + c_2 g' = 0$. Έτσι, έχουμε

$$c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0) = 0, \; c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0) = 0.$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα έχει ορίζουσα την $W(f,g)(x_0)$ που δεν είναι μηδέν και επομένως έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή αναγκαστικά είναι $c_1 = c_2 = 0$. Αυτό αποδεικνύει την γραμμική ανεξαρτησία των f, g. [Ας σημειωθεί ότι το συμπέρασμά μας μπορεί να προκύψει από το (i).]

(iii) Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = x^2, \; x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = x|x|, \; x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε

$$W(f,g)(x) = \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{pmatrix} = 0 \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Από την άλλη μεριά, οι f, g είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι $c_1 f + c_2 g = 0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές, τότε (για $x=1$ και για $x=-1$) έχουμε

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ και } c_1 - c_2 = 0,$$

που συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1 = c_2 = 0$.

(iv) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ και ότι $g(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Τότε έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = -\frac{W(f,g)}{g^2} = 0$$

και άρα υπάρχει μια σταθερά c έτσι ώστε $f/g = c$. Επομένως, είναι $f - cg = 0$, που σημαίνει ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες.

B-16. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y'' - y' - 2y = 4e^{-x}; \; y(0) = \alpha, \; y'(0) = \beta,$$

όπου α, β *είναι σταθερές. Ακόμα, να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα* α, β *ώστε η λύση να είναι φραγμένη στο* $[0,\infty)$.

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = e^{-x},\ x\in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{2x},\ x\in \mathbb{R}.$$

Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι η

$$y_\mu(x) = -\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbb{R}.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τώρα, έχουμε

$$y(0) = c_1+c_2 =\alpha \quad \text{και} \quad y'(0) = -c_1+2c_2-\frac{4}{3} = \beta$$

από όπου προκύπτει $c_1= \frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)$ και $c_2= \frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)$. Άρα, η λύση y_0 του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)e^{-x}+\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις e^{-x} και xe^{-x} είναι φραγμένες για $x\geq 0$. Επομένως, η λύση y_0 είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ αν και μόνο αν

$$\alpha+\beta+\frac{4}{3} = 0.$$

Β-17. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(E_1) \qquad \left(1-\frac{1}{x}\right)y'' + \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)y' - \frac{1}{x^4}y = \frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3},\ x>1.$$

Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $t=1/x$ *μετασχηματίζει την* (E_1) *σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση* (E_2). *Να βρεθεί μια λύση* y_μ *της* (E_2) *της μορφής* $y_\mu(t)=t^m$, $0<t<1$ (*m ακέραιος*). *Ας είναι* (E_3) *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της* (E_2). *Να βρεθούν δύο λύσεις* y_1 *και* y_2 *της* (E_3) *των μορφών* $y_1(t)=\alpha t+\beta$, $0<t<1$ *και* $y_2(t)=e^{\gamma t}$, $0<t<1$ (α, β, γ *σταθερές*). *Τέλος, να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης* (E_1).

Έχουμε για κάθε $x>1$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

και έτσι η (E_1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(E_2) \qquad t^3(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+t^4\frac{dy}{dt}-t^3y = 2-2t-2t^2,\ 0<t<1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $y_\mu(t) = t^m$, $0<t<1$ (m ακέραιος) είναι μια λύση της (E_2) αν και μόνο αν m=-1. Άρα, είναι

$$y_\mu(t) = \frac{1}{t}, \ 0<t<1.$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της (E_3) αν και μόνο αν $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\gamma=1$. Άρα, δύο λύσεις της (E_3) είναι οι

$$y_1(t) = t, \ 0<t<1 \ \text{ και } \ y_2(t) = e^t, \ 0<t<1.$$

Αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(t) = \det\begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t-1)e^t < 0 \quad \text{για } \ 0<t<1.$$

Έτσι, οι λύσεις της (E_2) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(t) = c_1t+c_2e^t+\frac{1}{t}, \ 0<t<1,$$

και επομένως οι λύσεις της (E_1) είναι

$$y(x) = \frac{1}{x} + c_2e^{1/x}+x, \ x>1,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

C. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

C-1. *Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \textit{για} \quad x \in [0,1]$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε $x_0 \in [0,1]$ *τα διανύσματα* $f_1(x_0)$ *και* $f_2(x_0)$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μπορεί οι* f_1, f_2 *να είναι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος;*

Ας υποθέσουμε ότι $c_1f_1+c_2f_2=0$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Τότε

$$c_1+c_2e^x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Άρα θα είναι (για x=0 και για x=1)

$$c_1+c_2 = 0 \quad \text{και} \quad c_1+c_2e = 0$$

και επομένως θα πρέπει αναγκαστικά $c_1=c_2=0$. Αυτό αποδεικνύει τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων f_1 και f_2.

Για οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [0,1]$, τα διανύσματα $f_1(x_0)$ και $f_2(x_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού ισχύει

$$e^{x_0} f_1(x_0)-f_2(x_0) = 0.$$

Αν οι f_1, f_2 ήταν λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος, τότε η γραμμική ανεξαρτησία των f_1, f_2 θα ισοδυναμούσε με τη γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $f_1(x_0), f_2(x_0)$ για οποιοδήποτε $x_0 \in I$. 'Αρα, οι συναρτήσεις f_1, f_2 δεν είναι δυνατόν να είναι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος.

C-2. *Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα κάθε πίνακα λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1-\cos^2 x & \log(1+x^2) \\ x^2+7 & -\sin^2 x \end{pmatrix} y, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερά.

Ας είναι Y ένα πίνακας λύσεων. Τότε, με τη χρήση του τύπου του Jacobi, παίρνουμε για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$\det Y(x) = \det Y(0) \exp\left[\int_0^x \left(1-\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt\right] = \det Y(0).$$

C-3. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα* $y'=Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας. Αν*

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \quad y_3(x) = \begin{pmatrix} e^x-e^{3x} \\ -e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

είναι τρείς λύσεις αυτού, να βρεθεί ο πίνακας συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$.

Ας θέσουμε

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} & e^x+e^{3x} & e^x-e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & -e^{3x} \\ 0 & e^{3x} & -e^{3x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ο πίνακας Y είναι ένας πίνακας λύσεων. Επιπλέον, βρίσκουμε

$$\det Y(x) = 2e^{6x} \neq 0 \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, Y είναι ένας βασικός πίνακας. Αφού και ο e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας, θα υπάρχει ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας C με $\det C \neq 0$ έτσι ώστε

$$e^{xA} = Y(x)C \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε για $x=0$

$$I = e^{0A} = Y(0)C, \quad \text{δηλαδή} \quad C = Y^{-1}(0).$$

΄Ετσι, παίρνουμε για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = Y(x)Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} & e^x+e^{3x} & e^x-e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & -e^{3x} \\ 0 & e^{3x} & -e^{3x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^x\right) & \frac{1}{2}\left(-e^{2x}+e^{3x}\right) \\ 0 & e^{2x} & -e^{2x}+e^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

C-4. *Δεδομένου ότι για κάθε* $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} t^{2\nu} = \cos t \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} t^{2\nu-1} = \sin t\,,$$

να επιλυθεί (χωρίς χρησιμοποίηση του Θεωρήματος του Putzer) το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ας θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$A^{2\nu} = (-1)^\nu I \quad \text{και} \quad A^{2\nu-1} = (-1)^{\nu-1} A \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ παίρνουμε

$$e^{xA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu A^\nu}{\nu!} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu} A^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1} A^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}(-1)^\nu I}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}(-1)^{\nu-1} A}{(2\nu-1)!}$$

$$= \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}\right] I + \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1}\right] A$$

$$= (\cos x) I + (\sin x) A = \cos x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & 2\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = e^{(x-0)A}y(0) = \begin{pmatrix} \cos x & 2\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x-4\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x-2\cos x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}.$$

C-5. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

$$y' = Ay \quad \textit{με} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) *Να αποδειχθεί ότι*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας.

(ii) *Να βρεθεί η λύση* y *με*

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας* Y^* *με* $Y^*(0)=-2I$.

(iv) *Να βρεθεί ο* e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^x & -2e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = AY(x)$$

και

$$\det Y(x) = e^{5x} \neq 0$$

και επομένως ο Y είναι ένας βασικός πίνακας.

(ii) Η ζητούμενη λύση είναι για $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(0)y(0) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x+2e^{2x} \\ -e^x+e^{2x} \\ -3e^x+3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(iii) Θα είναι $Y^*=YC$ για κάποιον σταθερό τρίτης τάξης πίνακα C.'Ετσι,

$$-2I = Y^*(0) = Y(0)C$$

και επομένως $C=-2Y^{-1}(0)$. 'Αρα, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$Y^*(x) = -2Y(x)Y^{-1}(0) = -2\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^x-4e^{2x} & 2e^x-2e^{2x} & -2e^x+2e^{2x} \\ 2e^x-2e^{2x} & 2e^x-4e^{2x} & -2e^x+2e^{2x} \\ 6e^x-6e^{2x} & 6e^x-6e^{2x} & -6e^x+4e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(iv) Αφού ο e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι επίσης ένας βασικός πίνακας, θα υπάρχει ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας D τέτοιος ώστε

$$e^{xA} = Y^*(x)D \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Τότε θα είναι

$$I = e^{0A} = Y^*(0)D = -2ID = -2D$$

και άρα $D=-\frac{1}{2}I$. Επομένως, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = -\frac{1}{2}Y^*(x) = \begin{pmatrix} -e^x+2e^{2x} & -e^x+e^{2x} & e^x-e^{2x} \\ -e^x+e^{2x} & -e^x+2e^{2x} & e^x-e^{2x} \\ -3e^x+3e^{2x} & -3e^x+3e^{2x} & 3e^x-2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

C-6. *Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = Ay,$$

όπου A είναι ένας συνεχής πίνακας- συνάρτηση σε ένα διάστημα I. Θέτουμε για τυχόντα $x, t \in I$

$$E(x, t) = Y(x)Y^{-1}(t).$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x, t) = -E(x, t)A(t) \quad \text{για} \ x, t \in I.$$

Αφού ο Y είναι ένας βασικός πίνακας, θα ισχύει $\det Y(t) \neq 0$ για όλα τα $t \in I$ (και επομένως θα ορίζεται ο $Y^{-1}(t)$ για $t \in I$) και ακόμα

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{για κάθε} \ t \in I.$$

Έτσι, για τυχόντα $x, t \in I$, παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,t) = Y(x)\frac{dY^{-1}(t)}{dt} = Y(x)\left[-Y^{-1}(t)Y'(t)Y^{-1}(t)\right]$$

$$= -\left[Y(x)Y^{-1}(t)\right][A(t)Y(t)]Y^{-1}(t) = -E(x, t)A(t).$$

C-7. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

$$y' = \begin{pmatrix} f & g \\ -g & f \end{pmatrix} y,$$

όπου f *και* g *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Ας είναι* x_0 *ένα σημείο του* I *και για κάθε* $x \in I$ *ας θέσουμε*

$$h_1(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{και} \quad h_2(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right].$$

Να αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) & h_2(x)\sinh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) & h_2(x)\cosh_1(x) \end{pmatrix}, \ x \in I$$

είναι ένας βασικός πίνακας. Να βρεθεί, στη συνέχεια, η λύση y *με*

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Αμέσως βρίσκουμε

$$\det Y(x) = [h_2(x)]^2 > 0 \quad \text{για όλα τα} \ x \in I.$$

Επίσης, έχουμε για κάθε $x \in I$

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} f(x)h_2(x)\cosh_1(x)-g(x)h_2(x)\sinh_1(x) & f(x)h_2(x)\sinh_1(x)+g(x)h_2(x)\cosh_1(x) \\ -f(x)h_2(x)\sinh_1(x)-g(x)h_2(x)\cosh_1(x) & f(x)h_2(x)\cosh_1(x)-g(x)h_2(x)\sinh_1(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) & h_2(x)\sinh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) & h_2(x)\cosh_1(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix} Y(x).$$

Άρα, ο Y είναι ένας βασικός πίνακας. Η ζητούμενη λύση θα είναι

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y(x_0),\ x \in I.$$

Αλλά παρατηρούμε ότι $Y(x_0)=I$. Έτσι, είναι για κάθε $x \in I$

$$y(x) = Y(x)y(x_0) = \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) & h_2(x)\sinh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) & h_2(x)\cosh_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) \end{pmatrix}.$$

C-8. *Ας είναι* y_1 *η λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} y \quad (\varepsilon \neq 0 \ \textit{σταθερά})$$

και y_2 *η λύση του διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

με

$$y_1(0) = y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι $y_1 \to y_2$ *όταν* $\varepsilon \to 0$.

Αμέσως βρίσκουμε

$$y_2(x) = e^{(x-0)I} y_2(0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^{-x} \end{pmatrix} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, ας θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι λ_1=1-ε και λ_2=1+ε με $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Εύκολα βρίσκουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = (1-\varepsilon)r_1,\ r_2' = r_1+(1+\varepsilon)r_2\ ;\ r_1(0) = 1,\ r_2(0) = 0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{(1-\varepsilon)x},\quad r_2(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\right] \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, παίρνουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = r_1(x)I+r_2(x)(A-\lambda_1 I) = e^{(1-\varepsilon)x}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\right]\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\\ e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x}\end{pmatrix}.$$

Άρα, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = e^{(x-0)A}y_1(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\\ e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{(1-\varepsilon)x}\\ -e^{(1-\varepsilon)x}\end{pmatrix}.$$

Επομένως, είναι

$$y_1(x) = e^{-\varepsilon x}y_2(x) \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}$$

και άρα $y_1 \to y_2$ όταν $\varepsilon \to 0$.

C-9. *Ας είναι*

$$A_1 = \begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα $y'=A_1y$ *και* $y'=A_2y$. *Στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθούν οι λύσεις αυτών για να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα* $y'=Ay$.

Οι ιδιοτιμές του A_1 είναι 4 και 2. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = 4r_1,\ r_2' = r_1+2r_2\ ;\ r_1(0) = 1,\ r_2(0) = 0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{4x} \text{ και } r_2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right) \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA_1} = e^{4x} I + \frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right)(A_1-4I) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$e^{xA_1} = \begin{pmatrix} e^{4x} & \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{4x}\right) \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ο A_2 έχει τις ιδιοτιμές 1,-2 και 3. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$r_1' = r_1 , \ r_2' = r_1-2r_2 , \ r_3' = r_2+3r_3 ; \ r_1(0) = 1 , \ r_2(0) = r_3(0) = 0$$

έχει τη λύση

$$r_1(x) = e^x , \ r_2(x) = \frac{1}{3}\left(e^x-e^{-2x}\right) , \ r_3(x) = -\frac{1}{6}e^x + \frac{1}{15}e^{-2x} + \frac{1}{10}e^{3x}$$

για $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, είναι

$$A_2-I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A_2-I)(A_2+2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$e^{xA_2} = r_1(x)I+r_2(x)(A_2-I)+r_3(x)(A_2-I)(A_2+2I), \quad x \in \mathbb{R}$$

και έτσι βρίσκουμε

$$e^{xA_2} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x}-e^x & -3e^x+e^{-2x}+2e^{3x} \\ 0 & e^{-2x} & e^{-2x}-e^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τώρα, είναι φανερό ότι θα είναι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} e^{xA_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{xA_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x} & \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{4x}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^x & e^{-2x}-e^x & -3e^x+e^{-2x}+2e^{3x} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2x} & e^{-2x}-e^{3x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

.

C-10. (i) *Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα* $y' = Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός* n-*τάξης πίνακας. Αν* λ *είναι μια σταθερά και* c *είναι* *ένα* n-*διάστατο διάνυσμα, να αποδειχθεί ότι* $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbb{R}$ *είναι μια λύση αν και μόνο αν* $Ac=\lambda c$.

(ii) *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Η $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση αν και μόνο αν για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda e^{\lambda x}c = Ae^{\lambda x}c \text{ ή } (Ac-\lambda c)e^{\lambda x} = 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν $Ac-\lambda c=0$. Έτσι, αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και c είναι ένα ιδιοδιάνυσμα αυτού αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ, τότε η $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση του διαφορικού συστήματος. Ακόμα, αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A και $c_1, \ldots, c_n$ είναι, αντίστοιχα των ιδιοτιμών αυτών, ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, τότε οι συναρτήσεις

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x}c_k, \; x \in \mathbb{R} \;\; (k=1, \ldots, n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος, αφού τα αρχικά διανύσματα $y_k(0)=c_k$ $(k=1, \ldots, n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί αντιστοιχούν σε διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές).

(ii) Ας ονομάσουμε A τον πίνακα του γραμμικού διαφορικού συστήματός μας. Οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 3 \;\text{ και }\; \lambda_3 = -2.$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε ότι τα διανύσματα

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A αντίστοιχα των ιδιοτιμών λ_1, λ_2 και λ_3. Έτσι, τρείς γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος είναι για $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}c_1 = \begin{pmatrix} -e^{x} \\ 4e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix}, \; y_2(x) = e^{\lambda_2 x}c_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} \text{ και } y_3(x) = e^{\lambda_3 x}c_3 = \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

'Ολες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = \begin{pmatrix} -C_1e^{x}+C_2e^{3x}-C_3e^{-2x} \\ 4C_1e^{x}+2C_2e^{3x}+C_3e^{-2x} \\ C_1e^{x}+C_2e^{3x}+C_3e^{-2x} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R},$$

όπου C_1, C_2 και C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για τη λύση y_0 του προβλήματος αρχικών τιμών έχουμε

$$-C_1+C_2-C_3 = 1\ ,\ 4C_1+2C_2+C_3 = 0\ ,\ C_1+C_2+C_3 = -1$$

και άρα

$$C_1 = 1/3\ ,\ C_2 = 0 \text{ και } C_3 = -4/3\ .$$

Επομένως, είναι

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{x} + \frac{4}{3}e^{-2x} \\ \frac{4}{3}e^{x} - \frac{4}{3}e^{-2x} \\ \frac{1}{3}e^{x} - \frac{4}{3}e^{-2x} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

C-11. *Να βρεθεί ο σταθερός πίνακας* A, *αν*

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} 2e^{2x}-e^{x} & e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ e^{2x}-e^{x} & 2e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{x}-2e^{2x} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε

$$\left(e^{xA}\right)' = Ae^{xA} \text{ γαι κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για x=0 (αφού ο A είναι σταθερός) παίρνουμε

$$A = \left(e^{xA}\right)' \Big|_{x=0}.$$

Έτσι, βρίσκουμε

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

C-12. *Να αποδειχθεί ότι*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος της μορφής $y'=Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας. Να βρεθεί ο πίνακας* A.

Αμέσως βρίσκουμε

$$\det Y(x) = e^{4x} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε (μετά τους υπολογισμούς)

$$Y'(x)Y^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \equiv A$$

και επομένως

$$Y'(x) = AY(x) \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, ο Y είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y'=Ay$, όπου ο A ορίσθηκε παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Προτεινόμενες για λύση

1. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y' = \frac{1}{1+x^2}\exp\left(-y^2\sin^2 x\right), \ y(0) = 1$$
έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

2. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y' = (3x^2+1)\cos^2 y+(x^3-2x)\sin 2y \ , \ y(5) = 7$$
έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

3. Να βρεθεί μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'=-x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$, διαφορετική από τη σταθερή λύση $y=1$ αυτού. Το γεγονός της ύπαρξης δύο λύσεων για το πρόβλημα αρχικών τιμών αυτό έρχεται σε αντίθεση με κάποιο από τα γνωστά κριτήρια ύπαρξης και μονοσημάντου λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

4. Ας είναι λ μια πραγματική σταθερά. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y' = y+\lambda x^2\sin y \ , \ y(0) = 1$$
έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα [-1,1], η οποία είναι τέτοια ώστε
$$|y(x)-e^x| \le |\lambda|\left(e^{|x|}-1\right) \quad \text{για } |x|\le 1.$$

5. Αν $\lambda>0$, να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y' = \sqrt{1+2\lambda x-y^2} \ , \ y(0) = 0.$$

6. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' + \frac{1}{1+x^2}\, y''+y' \sin x+ \frac{x}{y^2+z^2+1} = 0,$$

$$z''+e^{-x}z'+\cos(y+z) = 0\ ;$$

$$y(0)=1\ ,\ y'(0)=0,\ y''(0)=5,\ z(0)=0,\ z'(0)=3.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Το διαφορικό σύστημα να αναχθεί σε μια 5-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση με την αντικατάσταση

$$y=y_1,\ y'=y_2,\ y''=y_3,\ z=y_4,\ z'=y_5.$$

7. Ας είναι ε, g, υ_0 και α θετικές σταθερές και ας θεωρήσουμε τα διαφορικά συστήματα

(*) $$y'' = -\varepsilon y',\quad z'' = -g-\varepsilon z'$$

και

(**) $$y'' = 0,\quad z'' = -g.$$

Να αποδειχθεί ότι καθένα από τα συστήματα (*) και (**) έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία, η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

(C) $$y(0) = z(0) = 0\ ,\ y'(0) = \upsilon_0\cos\alpha\ ,\ z'(0) = \upsilon_0\sin\alpha\ .$$

Στη συνέχεια, αν $\varphi = (y_1,z_1)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (*)-(C) και $\omega = (y_2,z_2)$ είναι η λύση του (**)-(C), να αποδειχθεί ότι $|\varphi-\omega|\to 0$ όταν $\varepsilon\to 0$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Καθένα από τα συστήματα (*) και (**) να αναχθεί σε ένα (πρώτης τάξης) γραμμικό διαφορικό σύστημα.

8. Ας είναι $\{y_1,y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το $(-\infty,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_2 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της λύσης y_1.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Παραγωγίσατε τη συνάρτηση $y_2/\,y_1$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Rolle.

9. Ας είναι a, b και c θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay''+by'+cy = 0$$

τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

10. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+a_1y'+a_0y = b\ ,$$

όπου a_0, a_1 είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι οι ρίζες λ_1 και λ_2 της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2+a_1\lambda+a_0 = 0$

είναι διακεκριμμένες και $\mathrm{Re}\lambda_1<0$, $\mathrm{Re}\lambda_2<0$. Να αποδειχθεί ότι, αν ισχύει $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, τότε όλες οι λύσεις της (E) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

11. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad y''+a_1y'+a_0y = 0 ,$$

όπου a_0, a_1 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, και ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Ας υποθέσουμε ότι y_1 είναι μια λύση της (E_0) με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια λύση y_2 της (E_0) τέτοια ώστε

$$W(y_1,y_2)(x_0) = 1 .$$

Να βρεθεί η y_2, συναρτήσει της y_1, από τον τύπο

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right], \quad x\in I .$$

12. (I) Ας είναι φ μια πραγματική μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+\alpha y = 0$$

και ψ μια πραγματική μη τετριμμένη λύση της

$$y''+\beta y = 0,$$

όπου α και β είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα (a, b) με $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Έστω ότι ισχύει

$$\beta(x) > \alpha(x) \text{ για όλα τα } x\in(a, b).$$

Να αποδειχθεί ότι, αν x_1 και x_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της φ, τότε η ψ έχει μια ρίζα ξ με $x_1<\xi<x_2$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ας υποτεθεί ότι $\psi(x)>0$ για $x\in(x_1, x_2)$ και ακόμα ότι $\varphi(x)>0$ για $x\in(x_1, x_2)$. Τότε

$$(\psi\varphi'-\varphi\psi')' = \psi\varphi''-\varphi\psi'' = (\beta-\alpha)\varphi\psi$$

και έτσι

$$\psi(x_2)\varphi'(x_2)-\psi(x_1)\varphi'(x_1) > 0,$$

αφού $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$. Να αποδειχθεί ότι $\varphi'(x_2)<0$ και $\varphi'(x_1)>0$.] Στη συνέχεια, ως μια εφαρμογή, να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+xy = 0$$

έχει άπειρες ρίζες στο διάστημα $(0, \infty)$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να θεωρηθεί η εξίσωση $y''+y=0$ και να χρησιμοποιηθεί το παραπάνω συμπέρασμα με $\alpha(x)=1$, $\beta(x)=x$ και $\varphi(x)=\cos x$.]

(II) Ας είναι α μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $(0,\infty)$ που υπόκειται στη συνθήκη:

(*) Υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $\alpha(x)\geq\varepsilon$ για κάθε $x>0$.

Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+\alpha y = 0$$

έχει άπειρες λύσεις στο διάστημα $(0, \infty)$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθεί το (I).] Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος, να αποδειχθεί ότι το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει αν η (*) αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση: $\alpha(x)\geq 0$, $x>0$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να θεωρηθεί η εξίσωση $y''+\frac{1}{4x^2}\,y=0$.]

(III) Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y''+\alpha y = 0,$$

όπου α είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα (a, b) με $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Να αποδειχθεί ότι, αν φ είναι μια μη τετριμμένη λύση η οποία έχει μια ρίζα x_0, τότε $\varphi'(x_0)\neq 0$. [ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια τέτοια ρίζα λέγεται *απλή*.] Στη συνέχεια, με τη βοήθεια αυτού του συμπεράσματος, να αποδειχθεί ότι οι ρίζες μιας μη τετριμμένης λύσης φ είναι *μεμονωμένες* (δηλαδή κάθε σημείο του συνόλου των ριζών δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως αυτού).

13. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ας είναι φ_n μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + n^2 y = 0$ που πληροί τις συνοριακές συνθήκες $\varphi_n(0) = \varphi_n(2\pi)$, $\varphi'_n(0) = \varphi'_n(2\pi)$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \text{για} \quad n \neq m.$$

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $(n^2 - m^2)\varphi_n\varphi_m = \varphi_n\varphi''_m - \varphi_m\varphi''_n = (\varphi_n\varphi'_m - \varphi_m\varphi'_n)'$.]

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι, για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους n και m με $n \neq m$, ισχύουν

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0 .$$

14. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E) \qquad y'' + ky' = f,$$

όπου k είναι μια θετική σταθερά και f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$.

(i) Να δοθεί ένα παράδειγμα, όπου η f να είναι φραγμένη και έτσι ώστε όλες οι λύσεις της (E) να είναι μη φραγμένες.

(ii) Να αποδειχθεί ότι, αν $\int_0^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, τότε όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες.

15. Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1, n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[x_0, \infty)$ και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \geq x_0$. Να βρεθεί μία αναγκαία συνθήκη (επί των συναρτήσεων a_{n-1} και a_n), ώστε κάθε λύση της (E_0) καθώς και οι παράγωγοι μέχρι n-1 τάξης αυτής να είναι φραγμένες στο διάστημα $[x_0, \infty)$.

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy' + (\cos x)y = 0$$

έχει μια τουλάχιστον λύση τέτοια ώστε αυτή ή η παράγωγός της να μην είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, \infty)$.

16. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E_0) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (α, β) με $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0). Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν οι y_1, y_2 έχουν κοινή ρίζα, τότε αυτές δεν αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

(ii) Αν οι y_1, y_2 έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στο ίδιο σημείο, τότε αυτές δεν αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

(iii) Αν οι y_1, y_2 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), τότε αυτές δεν είναι δυνατόν να έχουν ένα κοινό σημείο καμπής, εκτός αν οι p και q μηδενίζονται στο σημείο αυτό.

(iv) Ας είναι $x^* \in (\alpha, \beta)$. Αν $y_1(x^*) = 0$ και $W(y_1, y_2)(x^*) = 0$, τότε είτε $y_1 = 0$ είτε $y_2 = [y'_2(x^*)/ y'_1(x^*)]y_1$.

17. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(3x-x^2)y'+(1-x-e^{2x})y = 0\ , \quad x>0\ ,$$

αφού βρεθούν λύσεις αυτής της μορφής $y(x) = (1/x)\, e^{ag(x)}$, $x>0$, όπου a είναι σταθερά και

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt\ , \ x>0.$$

18. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E) \qquad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+ \ldots +a_1y'+a_0y = b\ ,$$

όπου a_i $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}$. Ας είναι υ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$\upsilon(0) = \upsilon'(0) = \ldots = \upsilon^{(n-2)}(0) = 0\,,\quad \upsilon^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$y(x) = \int_0^x \upsilon(x-t)b(t)dt\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

είναι η λύση της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να μετασχηματισθεί η (E) σε ένα γραμμικό διαφορικό σύστημα της μορφής $Y'=AY+B$ και να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{pmatrix} \upsilon(x) \\ \upsilon'(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \upsilon^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

είναι η n-οστή στήλη του e^{xA}.

19. Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S_0) $$y' = Ay,$$

όπου A είναι ένας n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση που είναι συνεχής στην πραγματική ευθεία $\mathbf{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν ισχύει

(*) $$A(-x) = -A(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}\,,$$

τότε κάθε λύση y του (S_0) είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $y(-x)=y(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ [και επομένως, για οποιονδήποτε βασικό πίνακα Y του (S_0), είναι $Y(-x)=Y(x)$ για $x \in \mathbf{R}$].

(ii) Αν

(**) Υπάρχει $\omega>0$ έτσι ώστε $A(x+\omega)=A(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

τότε, για τυχόντα βασικό πίνακα Y του (S_0), υπάρχει σταθερός n-τάξης τετραγωνικός πίνακας C έτσι ώστε να ισχύει $Y(x+\omega)=Y(x)C$ για όλα τα $x \in \mathbf{R}$.

(iii) Αν ισχύουν οι (*) και (**), τότε, για τυχόντα βασικό πίνακα Y του (S_0), είναι $Y(x-\omega)=Y(x)$ για όλα τα $x \in \mathbf{R}$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθούν τα (i) και (ii).]

(iv) Αν ισχύουν οι (*) και (**), τότε όλες οι λύσεις του (S_0) είναι ω-περιοδικές. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθούν τα (i) και (iii).]

20. Να αποδειχθεί ότι το διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 2xy_1+y_2\,,\ y_2' = e^{-x}y_1+(\cos x)y_2\ ;\ x>0$$

έχει μια μη φραγμένη λύση.

21. Ας θεωρήσουμε τους n-τάξης τετραγωνικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \lambda\ 1\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \lambda\ 1\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \end{pmatrix},$$

όπου λ είναι μια σταθερά. Να αποδειχθεί ότι $P^n=\mathbf{O}$ και, στη συνέχεια, ότι

$$e^{xA} = e^{\lambda x}\left[I+xP+\frac{x^2P^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}P^{n-1}}{(n-1)!}\right],\ x\in\mathbf{R}\,.$$

22. (i) Αν A και T είναι n-τάξης τετραγωνικοί πίνακες με $\det T\neq 0$, να αποδειχθεί ότι $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^{A}T$.

(ii) Αν

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο e^{xA}, $x\in\mathbf{R}$.

23. Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι $A(A-5I)=\mathbf{O}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί ο e^{xA}, $x\in\mathbf{R}$.

24. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετασθεί αν ο πίνακας-συνάρτηση Y είναι ή όχι βασικός πίνακας ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος της μορφής $y' = Ay$ για κάποιον σταθερό πίνακα A:

(i) $$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} & e^{x}+2e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} & e^{x}-2e^{-x} \\ 2e^{x} & e^{-x} & 2\left(e^{x}+e^{-x}\right) \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} ;$$

(ii) $$Y(x) = \begin{pmatrix} -5\cos 2x & -5\sin 2x & 3e^{2x} \\ -2(\cos 2x+\sin 2x) & 2(\cos 2x-\sin 2x) & 0 \\ \cos 2x & \sin 2x & e^{2x} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} ;$$

(iii) $$Y(x) = e^{x}\begin{pmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2(x+1) & 4x^2 \\ 1 & x+2 & 3 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} ;$$

(iv) $$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 2e^{-x} & e^{3x} \\ 2e^{x} & 2e^{-x} & e^{3x} \\ 3e^{x} & e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} .$$

25. Ας είναι A ένας (σταθερός) n-τάξης τετραγωνικός πίνακας. Ας είναι ακόμα v ένα ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο μιας ιδιοτιμής λ αυτού. Ας θεωρήσουμε το γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S) $$y' = Ay + ve^{\lambda x}, \ x \in \mathbf{R} .$$

(i) Να αποδειχθεί ότι, αν το A έχει n διακεκριμμένες ιδιοτιμές, τότε το (S) δεν έχει λύση φ της μορφής $\varphi(x)= ae^{\lambda x}$, $x \in \mathbf{R}$, όπου a είναι n-διάστατο διάνυσμα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το (S) έχει μια λύση ψ της μορφής $\psi(x)=(a+bx)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbf{R}$, όπου a και b είναι n- διάστατα διανύσματα.

Εφαρμογή : Για καθένα από τα παρακάτω γραμμικά διαφορικά συστήματα να βρεθεί [με χρήση του (ii)] μια μερική λύση:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}, \ x \in \mathbf{R} ;$$

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8x}, \ x \in \mathbf{R} .$$

26. Έστω το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S_0) $$y' = Ay,$$

όπου

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+\cos 2x & -1+\sin 2x \\ 1+\sin 2x & 1-\cos 2x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbf{R},$$

και ας είναι

$$S(x) = (\cos x - i \sin x) \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbf{R}, \text{ και } B = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι, αν Z είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $z' = Bz$, τότε ο $Y = SZ$ είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0). Στη συνέχεια, να βρεθεί ένας βασικός πίνακας του S_0).

27. Έστω το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$(S_0) \qquad y' = Ay,$$

όπου A είναι ένας n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0,\infty)$. Έστω ότι το (S_0) είναι ευσταθές και ότι υπάρχει σταθερά μ έτσι ώστε

$$\text{Re} \int_{x_0}^{x} \text{tr}A(s)ds \geq \mu \quad \text{για κάθε } x \geq x_0.$$

Να αποδειχθεί ότι το (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθές, αλλά δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

28. Ας θεωρήσουμε το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$(S) \qquad y' = Ay + b,$$

όπου A είναι ένας n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\infty)$ και b είναι μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$ για την οποία υπάρχει μια σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\int_{x}^{x+1} |b(s)|ds \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι, αν το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα $y' = Ay$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε όλες οι λύσεις του (S) είναι φραγμένες.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να αποδειχθεί και, στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο: Ας είναι φ μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάποια σταθερά $C \geq 0$, να ισχύει

$$\int_{x}^{x+1} \varphi(s)ds \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Τότε, για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, ισχύει

$$e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha s}\varphi(s)ds \le \frac{C}{1-e^{-\alpha}} \quad \text{για όλα τα} \quad x \ge 0.$$

29. Ας είναι $\omega \neq 0$ μια πραγματική σταθερά και f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $[0, \infty)$, τέτοια ώστε

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

Να αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$y'' + [\omega^2 + f(x)]y = 0$$

είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

30. Ας είναι A ένας n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι κάθε μη μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = Ay$$

έχει ένα μη μηδενικό όριο για $x \to \infty$. Να αποδειχθεί ότι, για οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα y_0, υπάρχει ακριβώς μια λύση y του παραπάνω διαφορικού συστήματος με

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = y_0.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Ι
ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Ας θεωρήσουμε τη (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

(E) $$y' = f(x,y),$$

όπου f *είναι μία* n-*διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σε ένα υποσύνολο* D_f *του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των* n-*διάστατων διανυσμάτων*. Ακόμα, ας θεωρήσουμε ένα *σημείο* $(x_0,y_0)\in D_f$ και την αρχική συνθήκη

(C) $$y(x_0) = y_0.$$

Έχουμε έτσι το *πρόβλημα αρχικών τιμών* (E)-(C).

Θα αποδείξουμε (Θεώρημα Α) ότι, αν a και b είναι δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $R = \{(x,y): |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\} \subseteq D_f$, τότε η ύπαρξη μίας τουλάχιστον λύσης (όχι αναγκαστικά μοναδικής) του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) εξασφαλίζεται με μόνη υπόθεση αυτή της συνέχειας στο R της συνάρτησης f (χωρίς να απαιτείται η υπόθεση ότι η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R). Επίσης, θα διαπιστώσουμε (Θεώρημα Β) ότι, αν a είναι ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $S = \{(x,y): |x-x_0| \leq a,\ y$ αυθαίρετο$\} \subseteq D_f$, τότε η υπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και φραγμένη στο S είναι ικανή για την ύπαρξη μίας τουλάχιστον λύσης (όχι αναγκαστικά μοναδικής) του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) (χωρίς να είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο S). Τα Θεωρήματα Α και Β θα αποδειχθούν με τη χρήση του Θεωρήματος Arzelà-Ascoli που θα το διατυπώσουμε (χωρίς να δώσουμε την απόδειξη αυτού) παρακάτω. Τέλος, για καθένα από τα Θεωρήματα Α και Β θα δώσουμε από ένα Παράδειγμα εφαρμογής του.

Ας είναι Φ μία οικογένεια n-διάστατων διανυσματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και, ακόμα, ας είναι $\overline{x}$ ένα σημείο του I. Λέμε ότι η οικογένεια Φ είναι *ισοσυνεχής στο* $\overline{x}$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για όλες τις συναρτήσεις $\varphi\in\Phi$, να είναι

$$|\varphi(x)-\varphi(\overline{x})| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x\in I \text{ με } |x-\overline{x}| < \delta.$$

Επίσης, θα λέμε ότι η οικογένεια Φ είναι *φραγμένη στο* $\bar{x}$, αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\varphi(\bar{x})| \leq M \quad \text{για κάθε συνάρτηση } \varphi \in \Phi.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ARZELA-ASCOLI. *Αν Φ είναι μία οικογένεια* n-*διάστατων διανυσματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα διάστημα* I, *η οποία είναι ισοσυνεχής και φραγμένη σε κάθε σημείο του* I, *τότε κάθε ακολουθία συναρτήσεων της οικογένειας Φ έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του* I.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας είναι* a *και* b *δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε*

$$R = \{(x,y): |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\} \subseteq D_f$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο* R. *Ακόμα, ας είναι*

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| > 0 \quad \textit{και} \quad r = \min\{a, b/M\}.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C) *έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα* $I = \{x: |x-x_0| \leq r\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα περιορισθούμε πρώτα στο διάστημα $[x_0, x_0+r]$.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ακολουθία $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,...}$ n-διάστατων διανυσματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[x_0, x_0+r]$, τέτοια ώστε $(x,\varphi_\nu(x))\in R$ για όλα τα x με $x_0 \leq x \leq x_0+r$, κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\varphi_1(x) = y_0, \quad x\in[x_0, x_0+r]$$

και για τυχόντα ακέραιο $\nu > 1$

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, \text{ για } x_0 \leq x \leq x_0+r/\nu \\ y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, \text{ για } x_0+kr/\nu \leq x \leq x_0+(k+1)r/\nu \quad (k = 1,2,...,\nu-1). \end{cases}$$

Πραγματικά: Η φ_1 ορίζεται στο διάστημα $[x_0, x_0+r]$ και, για κάθε x στο διάστημα αυτό, είναι $(x,\varphi_1(x)) = (x,y_0)\in R$. Για τυχόν $x\in[x_0, x_0+r/2]$, είναι $\varphi_2(x) = y_0$ και έτσι $(x,\varphi_2(x))\in R$. Αν $x\in[x_0+r/2, x_0+r]$, τότε $x_0 \leq x-r/2 \leq x_0+r/2$ και επομένως ο τύπος

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-r/2} f(t,\varphi_2(t))dt$$

έχει νόημα και ακόμα

$$|\varphi_2(x)-y_0| = \left| \int_{x_0}^{x-r/2} f(t,\varphi_2(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x-r/2} |f(t,\varphi_2(t))|dt$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+r/2} |f(t,\varphi_2(t))|dt \leq Mr/2 \leq Mr \leq b,$$

δηλαδή $(x,\varphi_2(x))\in R$. Έτσι, ορίζεται η φ_2 στο διάστημα $[x_0, x_0+r]$ και είναι $(x,\varphi_2(x))\in R$ για όλα τα x στο διάστημα αυτό. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε τυχόντα ακέραιο $\nu > 2$. Για $x\in [x_0, x_0+r/\nu]$, είναι $\varphi_\nu(x) = y_0$ και άρα $(x,\varphi_\nu(x))\in R$. Για οποιοδήποτε $x\in [x_0+r/\nu, x_0+2r/\nu]$, έχουμε $x_0 \leq x-r/\nu \leq x_0+r/\nu$ και έτσι έχει νόημα ο τύπος

$$\varphi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt$$

και επιπλέον

$$|\varphi_\nu(x)-y_0| \leq \int_{x_0}^{x-r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt \leq \int_{x_0}^{x_0+r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt \leq Mr/\nu \leq Mr \leq b,$$

που σημαίνει ότι $(x,\varphi_\nu(x))\in R$. Αν τώρα $x\in [x_0+2r/\nu, x_0+3r/\nu]$, τότε $x_0+r/\nu \leq x-r/\nu \leq x_0+2r/\nu$ και άρα πάλι έχει νόημα ο τύπος

$$\varphi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt$$

και επίσης

$$|\varphi_\nu(x)-y_0| \leq \int_{x_0}^{x-r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt \leq \int_{x_0}^{x_0+2r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt \leq M2r/\nu \leq Mr \leq b,$$

οπότε είναι $(x,\varphi_\nu(x))\in R$. Συνεχίζοντας, εφόσον $\nu > 3$, με αυτόν τον τρόπο, διαπιστώνουμε ότι η φ_ν ορίζεται στο διάστημα $[x_0+(\nu-1)r/\nu, x_0+r]$ και ακόμα είναι $(x,\varphi_\nu(x))\in R$ για x στο διάστημα αυτό. Έτσι, η φ_ν ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[x_0, x_0+r]$ και επιπλέον είναι $(x,\varphi_\nu(x))\in R$ για όλα τα x στο διάστημα αυτό.

Παρατηρούμε ότι για κάθε ακέραιο $\nu > 1$ είναι

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, & \text{αν } x_0 \leq x \leq x_0+r/\nu \\ y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, & \text{αν } x_0+r/\nu \leq x \leq x_0+r \end{cases}$$

ενώ

$$\varphi_1(x) = y_0 \quad \text{για } x\in [x_0, x_0+r].$$

Αν x και $\bar{x}$ είναι τυχόντα σημεία του διαστήματος $[x_0, x_0+r]$ και ν είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, τότε

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(\bar{x})| \leq M|x-\bar{x}|.$$

Πραγματικά: Για $\nu = 1$, αυτό είναι φανερό, αφού $\varphi_1(x) = \varphi_1(\bar{x}) = y_0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\nu > 1$. Αν τα σημεία x και $\bar{x}$ είναι στο διάστημα $[x_0, x_0+r/\nu]$ πάλι το συμπέρασμά μας είναι άμεσο. Αν ακριβώς ένα από τα δύο σημεία x και $\bar{x}$ ανήκει στο $[x_0, x_0+r/\nu]$, τότε, υποθέτοντας (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $x_0 \le \bar{x} \le x_0+r/\nu$ και $x_0+r/\nu \le x \le x_0+r$, παίρνουμε

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(\bar{x})| = \left| \int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt \right| \le \int_{x_0}^{x-r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt$$

$$\le M[x-(x_0+r/\nu)] \le M(x-\bar{x}) = M|x-\bar{x}|.$$

Τέλος, αν και τα δύο σημεία x και $\bar{x}$ ανήκουν στο $[x_0+r/\nu, x_0+r]$, τότε έχουμε

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(\bar{x})| = \left| \int_{x_0}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt - \int_{x_0}^{\bar{x}-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt \right|$$

$$= \left| \int_{\bar{x}-r/\nu}^{x-r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt \right|$$

$$\le \left| \int_{\bar{x}-r/\nu}^{x-r/\nu} |f(t,\varphi_\nu(t))|dt \right| \le M|x-\bar{x}|.$$

Αποδείχθηκε έτσι ο ισχυρισμός μας. Το συμπέρασμα αυτό συνεπάγεται την ισοσυνέχεια, σε κάθε σημείο $\bar{x} \in [x_0, x_0+r]$, της οικογένειας $\Phi = \{\varphi_\nu: \nu = 1,2,...\}$. Ακόμα, από αυτό προκύπτει ότι, για κάθε θετικό ακέραιο ν, είναι

$$|\varphi_\nu(\bar{x})| \le |\varphi_\nu(x_0)|+|\varphi_\nu(x_0)-\varphi_\nu(\bar{x})| \le |y_0|+M|x_0-\bar{x}| \le |y_0|+r$$

για όλα τα $\bar{x} \in [x_0, x_0+r]$. Έτσι, η οικογένεια Φ είναι φραγμένη σε κάθε σημείο $\bar{x}$ του διαστήματος $[x_0, x_0+r]$.

Τώρα, το Θεώρημα Arzelà-Ascoli εξασφαλίζει αμέσως ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,...}$ έχει μία υπακολουθία $\left(\varphi_{\lambda_\nu}\right)_{\nu=1,2,...}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[x_0, x_0+r]$ προς μία συνάρτηση y. Ας είναι ε τυχών αριθμός με $0 < \varepsilon < r$. Θεωρούμε έναν ακέραιο ν_0 με $\nu_0 \ge r/\varepsilon > 1$, οπότε για κάθε ακέραιο $\nu \ge \nu_0$ θα έχουμε

$$\varphi_{\lambda_\nu}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-r/\lambda_\nu} f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))dt - \int_{x-r/\lambda_\nu}^{x} f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))dt$$

για όλα τα x με $x_0+\varepsilon \leq x \leq x_0+r$. Επειδή

$$\left| \int_{x-r/\lambda_\nu}^{x} f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))dt \right| \leq \int_{x-r/\lambda_\nu}^{x} |f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))|dt \leq Mr/\lambda_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

για $x_0+\varepsilon \leq x \leq x_0+r$, και επειδή η σύγκλιση $\varphi_{\lambda_\nu} \underset{\nu\to\infty}{\to} y$ είναι ομοιόμορφη, παίρνουμε

$$y(x) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\lambda_\nu}(x) = y_0 + \lim_{\nu\to\infty} \int_{x_0}^{x-r/\lambda_\nu} f(t,\varphi_{\lambda_\nu}(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

για όλα τα $x\in [x_0+\varepsilon, x_0+r]$. Αφού το ε με $0 < \varepsilon < r$ είναι τυχόν, θα έχουμε

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \quad \text{για κάθε } x\in [x_0, x_0+r].$$

Τότε $y'(x) = f(x,y(x))$ για όλα τα $x\in [x_0, x_0+r]$, και $y(x_0) = y_0$, δηλαδή η οριακή συνάρτηση y είναι μία λύση στο διάστημα $[x_0, x_0+r]$ του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C).

Με ανάλογο τρόπο, μπορεί να αποδειχθεί και η ύπαρξη λύσης του (E)-(C) στο διάστημα $[x_0-r, x_0]$, αρκεί η ακολουθία συναρτήσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,\dots}$ να ορισθεί ως εξής:

$$\varphi_1(x) = y_0, \quad x\in [x_0-r, x_0]$$

και για κάθε ακέραιο ν με $\nu > 1$

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, & \text{για } x_0 - r/\nu \leq x \leq x_0 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x+r/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, & \text{για } x_0-(k+1)r/\nu \leq x \leq x_0-kr/\nu \quad (k=1,2,\dots,\nu-1). \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας είναι* a *ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε*

$$S = \{(x,y): |x-x_0| \leq a, \ y \text{ αυθαίρετο}\} \subseteq D_f$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f *είναι συνεχής και φραγμένη στο* S.

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C) *έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα* $I = \{x: |x-x_0| \leq a\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Περιοριζόμαστε πρώτα στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$ και ορίζουμε την ακολουθία $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,...}$ n-διάστατων διανυσματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[x_0, x_0+a]$ ως εξής:

$$\varphi_1(x) = y_0, \quad x\in [x_0, x_0+a]$$

και για κάθε ακέραιο ν με ν > 1

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, \text{ για } x_0 \leq x \leq x_0+a/\nu \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-a/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, \text{ για } x_0+ka/\nu \leq x \leq x_0+(k+1)a/\nu \end{cases} \quad (k=1,2,...,\nu-1).$$

Για κάθε ακέραιο ν > 1 είναι

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, \text{ αν } x_0 \leq x \leq x_0+a/\nu \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-a/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, \text{ αν } x_0+a/\nu \leq x \leq x_0+a \end{cases} .$$

Τώρα, αν M είναι ένας θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε

$$|f(x,y)| \leq M \quad \text{για όλα τα } (x,y)\in S,$$

τότε, όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος A (με το a στη θέση του r), συμπεραίνουμε ότι

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(\bar{x})| \leq M|x- \bar{x}| \quad (\nu = 1,2,...)$$

για τυχόντα x και $\bar{x}$ στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$, και παραπέρα ότι

$$|\varphi_\nu(\bar{x})| \leq |y_0|+a \quad (\nu = 1,2,...) \quad \text{για κάθε } \bar{x} \in [x_0, x_0+a].$$

Έτσι, η οικογένεια $\Phi = \{\varphi_\nu: \nu = 1,2,...\}$ είναι ισοσυνεχής και φραγμένη σε κάθε σημείο $\bar{x}$ του διαστήματος $[x_0, x_0+a]$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Arzelà-Ascoli, υπάρχει μία υπακολουθία $(\varphi_{\lambda_\nu})_{\nu=1,2,...}$ της $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,...}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$ προς μία συνάρτηση y. Όπως στο Θεώρημα A (με το a στη θέση του r), αποδεικνύουμε ότι η οριακή συνάρτηση y είναι μία λύση στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$ του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C). Τέλος, η ύπαρξη λύσης στο διάστημα $[x_0-a, x_0]$ του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) μπορεί να εξασφαλισθεί με ανάλογο τρόπο, αρκεί να ορισθεί η ακολουθία $(\varphi_\nu)_{\nu=1,2,...}$ με τον παρακάτω τρόπο: $\varphi_1(x) = y_0$ για $x_0-a \leq x \leq x_0$, και για κάθε ακέραιο ν > 1

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} y_0, \text{ για } x_0 -a/\nu \leq x \leq x_0 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x+a/\nu} f(t,\varphi_\nu(t))dt, \text{ για } x_0-(k+1)a/\nu \leq x \leq x_0-ka/\nu \end{cases} \quad (k=1,2,...,\nu-1).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = 0$$

με

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy^{1/3}, & \text{για } x\in\mathbf{R} \text{ και } |y| \leq 1 \\ e^x \log(-1+|y|), & \text{για } x\in\mathbf{R} \text{ και } |y| > 1. \end{cases}$$

Ας είναι a ένας θετικός αριθμός και

$$R = \{(x,y): |x| \leq a, \ |y| \leq 1\}.$$

Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 3a$$

και $r \equiv \min\{a, 1/M\} = \min\{a, 1/(3a)\}$. Το r γίνεται μέγιστο όταν $\alpha = 1/(3a)$, δηλαδή $a = 1/\sqrt{3}$. Λαμβάνουμε λοιπόν $a = 1/\sqrt{3}$ και τότε έχουμε $r = 1/\sqrt{3}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο

$$R = \{(x,y): |x| \leq 1/\sqrt{3}, \ |y| \leq 1\},$$

σύμφωνα με το Θεώρημα Α, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση f δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R. Πραγματικά: Αν η f πληρούσε τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K > 0$ στο R, τότε για κάθε y με $|y| \leq 1$ θα ήταν

$$|f(1/3,y) - f(1/3, 0)| \leq K|y|,$$

δηλαδή $|y|^{1/3} \leq K|y|$ ή $|y|^{2/3} \geq 1/K > 0$, που είναι μία αντίφαση. Εξάλλου, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει δύο λύσεις στο διάστημα $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, τις ακόλουθες:

$$y_1(x) = 0, \ x\in[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}] \quad \text{και} \quad y_2(x) = x^3, \ x\in[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}].$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ας είναι

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy^{1/3}, & \text{για } |x| \leq 1 \text{ και } |y| \leq 1 \\ e^{-1+|x|}\sin y, & \text{για } x\in\mathbf{R} \text{ και } |y| > 1 \end{cases}$$

και ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο

$$S = \{(x,y): |x| \leq 1, \ y\in\mathbf{R}\}.$$

Ακόμα, η f είναι φραγμένη στο S, γιατί

$$|f(x,y)| \leq 3 \quad \text{για } |x| \leq 1 \text{ και } |y| \leq 1$$

και

$$|f(x,y)| \leq 1 \quad \text{για } |x| \leq 1 \text{ και } |y| \leq 1$$

και επομένως ο αριθμός 3 είναι ένα φράγμα της f στο S. Σύμφωνα με το Θεώρημα

B, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα [-1, 1]. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση f δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο S (αυτό αποδεικνύεται όπως ακριβώς στο Παράδειγμα 1). Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει τις λύσεις

$$y_1(x) = 0, \; x \in [-1, 1] \quad \text{και} \quad y_2(x) = x^3, \; x \in [-1, 1].$$

ΘΕΜΑ ΙΙ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ: ΟΛΙΚΟ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΜΗ ΕΠΕΚΤΑΣΙΜΩΝ ΛΥΣΕΩΝ. ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΜΗ ΕΠΕΚΤΑΣΙΜΩΝ ΛΥΣΕΩΝ. ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Θα ασχοληθούμε με τη μελέτη ολικών ιδιοτήτων των λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών, όπως είναι το ολικό μονοσήμαντο, η επέκταση, και η εξάρτηση από τις αρχικές τιμές.

Θα θεωρούμε εδώ τη (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

$$(E) \qquad y' = f(x,y),$$

όπου f *είναι μία* n-*διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σε ένα υποσύνολο* Ω *του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των* n-*διάστατων διανυσμάτων.* Παντού παρακάτω, θα υποτίθεται ότι Ω *είναι ένας τόπος* (δηλαδή ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) και ότι *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* Ω. Ακόμα, θα υποτίθεται ότι *η συνάρτηση* f *πληροί τη συνθήκη του Lipschitz τοπικά στο* Ω *με την έννοια ότι: Για κάθε σημείο του* Ω *υπάρχει μία περιοχή* N *αυτού με* $N \subseteq \Omega$ *τέτοια ώστε η* f *πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο* N. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, αν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ (k = 1,2,...,n), όπου y_k (k = 1,2,...,n) είναι οι συντεταγμένες της y, υπάρχουν και είναι συνεχείς στον τόπο Ω. Το μοναδικό συμπέρασμα που θα μας χρειασθεί είναι το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου Ι του Βιβλίου [Χρίστος Γ. Φίλος, *Μία Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις,* Ιωάννινα, 1992].

Ας θεωρήσουμε δύο λύσεις y_1, y_2 της (Ε) σε ένα διάστημα Ι και ας υποθέσουμε ότι $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ για κάποιο σημείο $x_0 \in I$. Είναι γνωστό (τοπικό μονοσήμαντο) ότι οι λύσεις y_1, y_2 ταυτίζονται σε μία "μικρή" περιοχή του x_0. Τίθεται το ερώτημα αν οι λύσεις y_1, y_2 συμπίπτουν σε ολόκληρο το διάστημα Ι, δηλαδή αν ισχύει το *ολικό μονοσήμαντο.* Θα αποδείξουμε (Θεώρημα Α) ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική.

Το δεύτερο πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε αφορά την *ύπαρξη και* το *μονοσήμαντο μη επεκτάσιμων λύσεων.* Μία λύση y της (Ε) σε ένα διάστημα Ι λέγεται μη επεκτάσιμη, αν και μόνο αν δεν υπάρχει λύση $\hat{y}$ της (Ε) σε ένα διάστημα $\hat{I}$, όπου το $\hat{I}$ περιέχει γνήσια το I, έτσι ώστε $\hat{y} = y$ στο I. Θα αποδειχθεί (Θεώρημα B) ότι, για κάθε σημείο $(x_0,y_0)\in\Omega$, υπάρχει ακριβώς μία μη επεκτάσιμη λύση της (Ε) με $y(x_0) = y_0$.

Θα μελετηθεί επίσης η *συμπεριφορά των μη επεκτάσιμων λύσεων στα άκρα των διαστημάτων ορισμού* αυτών. Θα αποδειχθεί (Θεώρημα C) ότι, όταν ο τόπος Ω είναι φραγμένος, κάθε μη επεκτάσιμη λύση της (Ε) "προσεγγίζει", όσο θέλουμε, το σύνορο του Ω. Ακόμα, το γράφημα μίας μη επεκτάσιμης λύσης της (Ε) "φθάνει" μέχρι το σύνορο του Ω και στην περίπτωση που ο τόπος Ω δεν είναι φραγμένος, αρκεί η λύση να είναι φραγμένη και τα άκρα του διαστήματος ορισμού αυτής να είναι πεπερασμένα (Θεώρημα D).

Τέλος, μελετούμε το πρόβλημα της *(συνεχούς) εξάρτησης των λύσεων από τις αρχικές τιμές*. Το Θεώρημα E εξασφαλίζει ότι μία "μικρή" αλλαγή στις αρχικές τιμές επιφέρει μία "μικρή" αλλαγή στη λύση. Το Θεώρημα αυτό θα δοθεί χωρίς απόδειξη.

Ας είναι (x_0,y_0) ένα οποιοδήποτε σημείο του Ω και A ένας θετικός αριθμός. Ας θεωρήσουμε μία περιοχή N του (x_0,y_0) με $N \subseteq \Omega$, τέτοια ώστε η f να πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο N. Μπορούμε να επιλέξουμε δύο σταθερές $a > 0$ και $b > 0$ με $a \le A$ έτσι ώστε

$$R = \{(x,y): |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\} \subseteq N.$$

Θέτουμε $r = \min\{a,b/M\}$, όπου $M = \max\{|f(x,y)|: (x,y)\in R\}$ (αν $M = 0$, τότε $r = a$). Είναι $r \le A$. Έτσι, επειδή η f είναι συνεχής στο R και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε αυτό, έχουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία λύση y της (Ε) στο διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$ που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$. Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα, το οποίο θα χρησιμοποιούμε παρακάτω:

Για κάθε σημείο $(x_0,y_0)\in\Omega$ *και για τυχόν* $A > 0$, *υπάρχει* r *με* $0 < r \le A$ *έτσι ώστε η διαφορική εξίσωση* (Ε) *έχει ακριβώς μία λύση* y *στο διάστημα* $[x_0-r, x_0+r]$ *που πληροί την αρχική συνθήκη* $y(x_0) = y_0$.

Ας είναι y και $\hat{y}$ δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (Ε) στα διαστήματα I και $\hat{I}$ αντίστοιχα. Θα λέμε ότι η $\hat{y}$ είναι μία *επέκταση* της y αν και μόνο αν το διάστημα $\hat{I}$ περιέχει γνήσια το I και $\hat{y}(x) = y(x)$ για όλα τα $x\in I$. Μία λύση της (Ε) σε ένα διάστημα θα λέμε ότι είναι *μη επεκτάσιμη* αν και μόνο αν δεν υπάρχει επέκταση αυτής.

Ισχύει το παρακάτω συμπέρασμα:

Ας είναι y *μία λύση της διαφορικής εξίσωσης* (E) *σε ένα διάστημα* I. *Αν το* I *δεν είναι ανοικτό, τότε υπάρχει μία επέκταση της* y *σε ένα ανοικτό διάστημα.*

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Ας υποθέσουμε ότι το I δεν είναι ανοικτό δεξιά και ας συμβολίσουμε με η το δεξιό άκρο αυτού. Υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η (E) να έχει μια λύση $\tilde{y}$ στο διάστημα $[\eta\text{-}r, \eta+r]$, η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $\tilde{y}(\eta) = y(\eta)$. Τότε η συνάρτηση y^* με $y^*(x) = y(x)$ για $x \in I$ και $y^*(x) = \tilde{y}(x)$ για $x \in (\eta, \eta+r)$ είναι μία επέκταση της y. Το διάστημα ορισμού της y^* είναι το $I \cup (\eta, \eta+r)$, το οποίο είναι ανοικτό δεξιά. Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν το διάστημα I δεν είναι ανοικτό αριστερά και ξ είναι το αριστερό άκρο αυτού, τότε υπάρχουν $\sigma > 0$ και μία επέκταση y_* της y, της οποίας το διάστημα ορισμού είναι το ανοικτό αριστερά διάστημα $(\xi\text{-}\sigma, \xi) \cup I$. Αν το διάστημα I είναι κλειστό δεξιά (αντίστοιχα, αριστερά) και ανοικτό αριστερά (αντίστοιχα, δεξιά), τότε η y^* (αντίστοιχα, η y_*) είναι μία επέκταση της y με ανοικτό διάστημα ορισμού. Τέλος, ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το I είναι κλειστό δεξιά και αριστερά και ας θέσουμε $\hat{y}(x) = y(x)$ για $x \in I$, $\hat{y}(x) = y^*(x)$ για $x \in (\eta, \eta+r)$ και $\hat{y}(x) = y_*(x)$ για $x \in (\xi\text{-}\sigma, \xi)$. Τότε $\hat{y}$ είναι μία επέκταση της y στο ανοικτό διάστημα $(\xi\text{-}\sigma, n+r)$. Αποδείχθηκε έτσι το συμπέρασμά μας.

Από το προηγούμενο συμπέρασμα προκύπτει αμέσως ότι:

Το διάστημα ορισμού κάθε μη επεκτάσιμης λύσης της διαφορικής εξίσωσης (E) *είναι ανοικτό.*

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας είναι* y_1, y_2 *δύο λύσεις της* (E) *σε ένα διάστημα* I. *Αν* $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ *για κάποιο* $x_0 \in I$, *τότε* $y_1 = y_2$ *στο* I.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση, όπου το διάστημα I είναι ανοικτό. Θα αποδείξουμε ότι $y_1(x) = y_2(x)$ για όλα τα $x \in I$ με $x > x_0$. Για τον σκοπό αυτόν, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\tilde{x} \in I$ με $\tilde{x} > x_0$ και $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})$ και θέτουμε $x^* = \inf\{\tilde{x} \in I\colon\ \tilde{x} > x_0 \text{ και } y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})\}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα $A > 0$ έτσι ώστε $[x_0\text{-}A, x_0+A] \subseteq I$. Τότε υπάρχει r με $0 < r \leq A$, τέτοιο ώστε η (E) έχει ακριβώς μία λύση y στο $[x_0\text{-}r, x_0+r]$ που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, όπου $y_0 \equiv y_1(x_0) = y_2(x_0)$. Επομένως, θα είναι $y_1 = y_2$ στο $[x_0\text{-}r, x_0+r]$, το οποίο εξασφαλίζει ότι $x^* > x_0$. Ας υποθέσουμε ότι $y_1(x^*) = y_2(x^*) \equiv y^*$ και ας εκλέξουμε ένα θετικό αριθμό A^* με την ιδιότητα ότι $[x^*\text{-}A^*, x^*+A^*] \subseteq I$. Έχουμε τότε ότι, για κάποιο r^* με $0 < r^* \leq A^*$, υπάρχει ακριβώς μία λύση $\bar{y}$ της (E) στο $[x^*\text{-}r^*, x^*+r^*]$ που πληροί τη συνθήκη $\bar{y}(x^*) = y^*$. Έτσι, θα είναι $y_1 = y_2$ στο $[x^*\text{-}r^*, x^*+r^*]$, το οποίο αντίκειται στον ορισμό του x^*. Έχουμε, λοιπόν, $y_1(x^*) \neq y_2(x^*)$ και επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon] \subseteq I$ και $y_1(x) \neq y_2(x)$ για $x^*-\varepsilon \leq x \leq x^*+\varepsilon$. Αυτό είναι ένα άτοπο, λόγω του τρόπου ορισμού του x^*. Αποδείχθηκε, λοιπόν, ότι $y_1 = y_2$ στο $I \cap (x_0, \infty)$. Για να αποδείξουμε ότι $y_1(x) = y_2(x)$ για όλα τα $x \in I$ με $x < x_0$, υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ορίζουμε $x^* = \sup\{\tilde{x} \in I: \tilde{x} < x_0$ και $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})\}$, οπότε με έναν ανάλογο τρόπο μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα άτοπο.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το διάστημα I δεν είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει μία επέκταση $\hat{y}_1$ της y_1 της οποίας το διάστημα ορισμού I_1 είναι ανοικτό. Ομοίως, μπορούμε να θεωρήσουμε μία επέκταση $\hat{y}_2$ της y_2 σε ένα ανοικτό διάστημα I_2. Οι περιορισμοί των δύο λύσεων $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ στο ανοικτό διάστημα $\hat{I} = I_1 \cap I_2$ είναι δύο λύσεις της (Ε) που έχουν την ίδια τιμή στο $x_0 \in \hat{I}$ και επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα είναι $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ στο $\hat{I}$. Τότε, επειδή $I \subseteq \hat{I}$, θα έχουμε επίσης $y_1 = y_2$ στο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας είναι* (x_0,y_0) *τυχόν σημείο του* Ω. *Υπάρχει ακριβώς μία μη επεκτάσιμη λύση* y *της διαφορικής εξίσωσης* (Ε) *που πληροί την αρχική συνθήκη* $y(x_0) = y_0$. *Το διάστημα ορισμού αυτής είναι ανοικτό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $\mathcal{F}$ η οικογένεια όλων των λύσεων της (Ε) που πληρούν την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$. Υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η (Ε) να έχει μία λύση u_0 στο $[x_0-r, x_0+r]$ με $u_0(x_0) = y_0$. Τότε $u_0 \in \mathcal{F}$ και επομένως $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Για κάθε $u \in \mathcal{F}$, ας συμβολίσουμε με I_u το διάστημα ορισμού της λύσης u. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε το διάστημα $I = \bigcup_{u \in \mathcal{F}} I_u$. Για κάθε $x \in I$, υπάρχει μία τουλάχιστον λύση $u \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $x \in I_u$. Επίσης, αν $u, v \in \mathcal{F}$ και $I_u \cap I_v \neq \{x_0\}$, τότε το Θεώρημα Α εξασφαλίζει ότι $u = v$ στο διάστημα $I_u \cap I_v$. Τώρα, για κάθε $x \in I$, ας ονομάσουμε $y(x)$ την κοινή τιμή όλων των λύσεων $u \in \mathcal{F}$ που είναι τέτοιες ώστε $x \in I_u$. Τότε ορίζεται στο διάστημα I μία συνάρτηση y, η οποία είναι μία λύση στο I της (Ε) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$. Έχουμε $y \in \mathcal{F}$. Από τον τρόπο ορισμού του I προκύπτει ότι η y είναι μη επεκτάσιμη. Έτσι, το διάστημα I είναι ανοικτό. Επίσης, είναι φανερό ότι, για κάθε $u \in \mathcal{F}$, έχουμε $y(x) = u(x)$ για όλα τα $x \in I_u$. Δηλαδή, η y είναι μία επέκταση κάθε άλλης λύσης $u \in \mathcal{F}$. Επομένως, η y είναι η μοναδική μη επεκτάσιμη λύση της (Ε) με $y(x_0) = y_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ C. *Ας υποθέσουμε ότι ο τόπος* Ω *είναι φραγμένος και ας είναι* y *μία μη επεκτάσιμη λύση της διαφορικής εξίσωσης* (Ε) *με διάστημα* *ορισμού το* (μ, m), *όπου* $-\infty < \mu < m < \infty$. *Ακόμα, ας είναι*

$$p(x) = \inf_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega} [(x-\bar{x})^2+|y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} \quad \text{για } x\in(\mu, m),$$

όπου $\partial\Omega$ *είναι το σύνορο του* Ω. *Τότε*

$$\lim_{x\to m-0} p(x) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος. Τότε υπάρχουν ένας θετικός αριθμός ε και μία ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1,2,...}$ στο διάστημα (μ, m) με $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = m$ και τέτοια ώστε $p(x_\nu) > \varepsilon$ για όλους τους θετικούς ακεραίους ν. Ας θεωρήσουμε το σύνολο S όλων των σημείων $(x,y)\in\Omega$ με

$$\inf_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega} [(x-\bar{x})^2+|y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} > \varepsilon.$$

Ακόμα, ας θέσουμε $P_\nu = (x_\nu, y(x_\nu))$ $(\nu = 1,2,...)$. Είναι $P_\nu\in S$ για κάθε θετικό ακέραιο ν. Έτσι, επειδή το S είναι φραγμένο, υπάρχει μία υπακολουθία $\left(P_{k_\nu}\right)_{\nu=1,2,...}$ της ακολουθίας $(P_\nu)_{\nu=1,2,...}$ τέτοια ώστε $\lim_{\nu\to\infty} P_{k_\nu} = \tilde{P}$ για κάποιο $\tilde{P} \equiv (\tilde{x},\tilde{y})\in S \cup \partial S$. Έχουμε $\lim_{\nu\to\infty} x_{k_\nu} = m$ και επομένως $\tilde{x} = m$. Επίσης, έχουμε $\tilde{P}\in\Omega$. Στη συνέχεια, θεωρούμε μία περιοχή N του σημείου $\tilde{P}$ με $N \subseteq \Omega$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο N. Έτσι, αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς $a > 0$ και $b > 0$ τέτοιους ώστε

$$R = \{(x,y): |x-\tilde{x}| \le a,\ |y-\tilde{y}| \le b\} \subseteq N,$$

τότε $R \subseteq \Omega$ και η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R. Ας είναι M μία θετική σταθερά με $|f(x,y)| \le M$ για όλα τα $(x,y)\in R$. Επιλέγουμε έναν αριθμό u, τέτοιον ώστε $0 < u \le \min\{a, b/(4M)\}$, και θέτουμε

$$R_1= \{(x,y): \tilde{x}-u \le x \le \tilde{x},\ |y-\tilde{y}| \le b/2\}.$$

Είναι $R_1 \subseteq R$. Παρατηρούμε ότι $P_{k_\nu}\in R_1$ για όλα τα μεγάλα ν, αφού $\lim_{\nu\to\infty} P_{k_\nu} = \tilde{P} \equiv (\tilde{x},\tilde{y})$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν θετικό ακέραιο λ τέτοιον ώστε $P_\lambda\in R_1$, δηλαδή $\tilde{x}-u \le x_\lambda \le \tilde{x}$ και $|y(x_\lambda)-\tilde{y}| \le b/2$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$R_2 = \{(x,y): x_\lambda \le x \le x_\lambda+r,\ |y-y(x_\lambda)| \le b/2\},$$

όπου $r = \tilde{x}+u-x_\lambda > 0$. Για κάθε $(x,y)\in R_2$ έχουμε

$$\tilde{x}-a \le \tilde{x}-u \le x_\lambda \le x \le x_\lambda+r = \tilde{x}+u \le \tilde{x}+a$$

και

$$|y-\tilde{y}| \le |y-y(x_\lambda)| + |y(x_\lambda)-\tilde{y}| \le (b/2)+(b/2) = b$$

και επομένως $(x,y)\in R$. Δηλαδή, είναι $R_2 \subseteq R$. Αν λοιπόν θέσουμε $M^* =$

$\max\{|f(x,y)|: (x,y)\in R_2\}$, τότε $M^* \leq M$. Επίσης, αφού $R_2 \subseteq R$, η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R_2. Έτσι, θέτοντας $\varrho = \min\{r,(b/2)/M^*\}$ (για $M^* = 0$, είναι $\varrho = r$), συμπεραίνουμε ότι η διαφορική εξίσωση (E) έχει (ακριβώς) μία λύση z στο διάστημα $[x_\lambda, x_\lambda+\varrho]$, η οποία πληροί την αρχική συνθήκη $z(x_\lambda) = y(x_\lambda)$. Αν $M^* > 0$, τότε έχουμε

$$(b/2)/M^* \geq b/(2M) \geq 2u \quad \text{και} \quad r = (\tilde{x}-x_\lambda)+u \leq 2u$$

και επομένως $\varrho = r$. Αυτό ισχύει και όταν $M^* = 0$. Έτσι, θα έχουμε ότι $x_\lambda+\varrho = x_\lambda+r = \tilde{x}+u$. Το Θεώρημα A εξασφαλίζει ότι $y(x) = z(x)$ για όλα τα $x\in[x_\lambda, \tilde{x})$. Η συνάρτηση $\hat{y}$ με $\hat{y}(x) = y(x)$ για $x\in(\mu, x_\lambda]$ και $\hat{y}(x) = z(x)$ για $x\in[x_\lambda, \tilde{x}+u]$ είναι μία επέκταση της y, αφού $\tilde{x}+u = m+u > m$. Αυτό όμως αντίκειται στο γεγονός ότι η λύση y είναι μη επεκτάσιμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ D. *Ας είναι* y *μία φραγμένη μη επεκτάσιμη λύση της διαφορικής εξίσωσης* (E) *με διάστημα ορισμού* (μ, m), *όπου* $-\infty < \mu < m < \infty$. *Τότε ισχύει* $\partial\Omega \neq \varnothing$ *και*

$$\lim_{x\to m-0} p(x) = 0,$$

όπου

$$p(x) = \inf_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega} [(x-\bar{x})^2+|y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} \quad \text{για } x\in(\mu, m).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η y είναι φραγμένη, υπάρχει $c > 0$ έτσι ώστε $(x,y(x))\in B$ για όλα τα $x\in(\mu, m)$, όπου $B = \{(x,y): x^2+|y|^2 < c^2\}$. Θεωρούμε το σύνολο $B^* = \{(x,y): x^2+|y|^2 < (2c)^2\}$ και ονομάζουμε Ω^* τη συνεκτική εκείνη συνιστώσα του $\Omega \cap B^*$ που είναι τέτοια ώστε $(x,y(x))\in\Omega^*$ για κάθε $x\in(\mu, m)$. Τότε Ω^* είναι ένας φραγμένος τόπος με $\Omega^*\subseteq\Omega$ και τέτοιος ώστε $(x,y(x))\in\Omega^*$ για κάθε $x\in(\mu, m)$. Αν θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση (E) στον τόπο Ω^* και εφαρμόσουμε το Θεώρημα C , συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to m-0} \left\{ \inf_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega^*} [(x-\bar{x})^2+|y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} \right\} = 0.$$

Αλλά είναι $\partial\Omega^* \subseteq \partial(\Omega \cap B^*) \subseteq \partial\Omega \cup \partial B^*$. Έτσι, για κάθε $(\bar{x},\bar{y})$ με $(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega^*$ και $(\bar{x},\bar{y})\notin\partial\Omega$, έχουμε $(\bar{x},\bar{y})\in\partial B^*$ και άρα

$$[(x-\bar{x})^2 + |y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} \geq (\bar{x}^2 + |\bar{y}|^2)^{1/2} - [x^2+|y(x)|^2]^{1/2} > 2c-c = c$$

για όλα τα $x\in(\mu, m)$. Επομένως, είναι $\partial\Omega \neq \varnothing$ και ισχύει

$$\lim_{x\to m-0} \left\{ \inf_{(\bar{x},\bar{y})\in\partial\Omega} [(x-\bar{x})^2+|y(x)-\bar{y}|^2]^{1/2} \right\} = 0.$$

Ας σημειώσουμε ότι *σε καθένα από τα Θεωρήματα* C *και* D *ισχύει επίσης* $\lim_{x \to \mu+0} p(x) = 0$. Οι αποδείξεις είναι ανάλογες.

Για λόγους συντομίας στη διατύπωση του παρακάτω Θεωρήματος, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: *Αν* (ξ,η) *είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του* Ω, *συμβολίζουμε με* $y(\cdot;\ \xi,\eta)$ *τη μοναδική μη επεκτάσιμη λύση της διαφορικής εξίσωσης* (Ε) *που λαμβάνει την τιμή* η *στο* ξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε. *Ας θεωρήσουμε τυχόν σημείο* $(x_0,y_0)\in\Omega$ *και ας είναι* (μ, m), *όπου* $-\infty \le \mu < m \le \infty$, *το διάστημα ορισμού της λύσης* $y(\cdot;\ x_0,y_0)$. *Τότε, για οποιοδήποτε* $\varepsilon > 0$ *και για τυχόντα* μ_0, m_0 *με* $\mu < \mu_0 < x_0 < m_0 < m$, *υπάρχει* $\delta \equiv \delta(\varepsilon,\mu_0,m_0) > 0$ *τέτοιο ώστε, για κάθε* $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in\Omega$ *με*

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \quad \textit{και} \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta,$$

η λύση $y(\cdot;\ \tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ *να έχει διάστημα ορισμού που περιέχει το* $[\mu_0, m_0]$ *και να είναι τέτοια ώστε*

$$|y(x;\ \tilde{x}_0,\tilde{y}_0) - y(x;\ x_0,y_0)| < \varepsilon \quad \textit{για όλα τα } x\in[\mu_0, m_0].$$

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα παραλειφθεί. Για μία απόδειξη αυτού (στηριζόμενη στο Λήμμα του Gronwall), παραπέμπουμε στο Βιβλίο [C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations,* Chelsea Publishing Company, New York, 1977].

ΘΕΜΑ III

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ ΣΥΣΤΟΛΗΣ

Ας είναι (Ε,ρ) ένας *μετρικός χώρος*. Μία απεικόνιση Τ: $E \to E$ είναι μία *συστολή,* αν υπάρχει ένας αριθμός θ με $0 \leq \theta < 1$ τέτοιος ώστε $\rho(Tx,Ty) \leq \theta\rho(x,y)$ για όλα τα x, y στο Ε. Ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα, γνωστό ως *Αρχή της Συστολής:* Αν (Ε,ρ) είναι ένας *πλήρης* μετρικός χώρος και Τ: $E \to E$ είναι μία συστολή, τότε η Τ έχει ακριβώς ένα *σταθερό σημείο*, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $x \in E$ τέτοιο ώστε $Tx = x$.

Με εφαρμογή της Αρχής της Συστολής, θα αποδείξουμε τα παρακάτω δύο Θεωρήματα για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας είναι*

$$R = \{(x,y): |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\},$$

όπου $a > 0$, $b > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$ *και* $y_0 \in \mathbf{K}^n$ *με* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ή* $\mathbf{C}$. *Ας είναι, ακόμα,* f: $R \to \mathbf{K}^n$ *μία συνεχής συνάρτηση, η οποία πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά* $K > 0$. *Ας θεωρήσουμε έναν αριθμό* r *με*

$$0 < r < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\},$$

όπου

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| > 0.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας συμβολίσουμε με C το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$ και με τιμές στον $\mathbf{K}^n$. Για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στο C, ορίζουμε

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup_{x_0-r \leq x \leq x_0+r} |\varphi(x)-\psi(x)|.$$

Τότε ϱ είναι (απόδειξη;) μία μετρική στο σύνολο C και άρα (C,ϱ) είναι ένας μετρικός χώρος. Ο μετρικός χώρος (C,ϱ) είναι (απόδειξη;) πλήρης. Περαιτέρω, θέτουμε

$$E = \{\varphi \in C: \varrho(\varphi,\varphi_0) \leq b\},$$

όπου

$$\varphi_0(x) = y_0 \quad \text{για} \quad x \in [x_0-r, x_0+r].$$

Επειδή το E είναι ένα κλειστό υποσύνολο του C, εύκολα διαπιστώνουμε (απόδειξη;) ότι (E,ϱ) (χρησιμοποιούμε εδώ τον συμβολισμό ϱ για τον περιορισμό της μετρικής ϱ επί του E^2) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Τώρα, για τυχούσα συνάρτηση $\varphi \in E$, ορίζουμε

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \quad \text{για} \quad x \in [x_0-r, x_0+r]$$

και παρατηρούμε ότι $T\varphi \in C$. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi \in E$, έχουμε για όλα τα $x \in [x_0-r, x_0+r]$

$$|(T\varphi)(x)-y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t))|dt \right| \leq M|x-x_0| \leq Mr \leq b$$

και επομένως

$$\varrho(T\varphi,\varphi_0) \equiv \sup_{x_0-r \leq x \leq x_0+r} |(T\varphi)(x)-y_0| \leq b,$$

που δηλώνει ότι $T\varphi \in E$. Άρα, T είναι μία απεικόνιση του E στον εαυτόν του, δηλαδή $T: E \to E$. Η απεικόνιση T είναι μία συστολή. Πραγματικά, για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στον E, έχουμε για όλα τα $x \in [x_0-r, x_0+r]$

$$|(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))]dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \right| \leq K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(t)-\psi(t)|dt \right|$$

$$\leq K \left| \int_{x_0}^{x} \left[\sup_{x_0-r \leq s \leq x_0+r} |\varphi(s)-\psi(s)| \right] dt \right|$$

$$= K|x-x_0|\varrho(\varphi,\psi) \leq Kr\varrho(\varphi,\psi)$$

και συνεπώς

$$\varrho(T\varphi,T\psi) \equiv \sup_{x_0-r \leq x \leq x_0+r} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq Kr\varrho(\varphi,\psi).$$

Επειδή $0 < Kr < 1$, η απεικόνιση T είναι μία συστολή.

Σύμφωνα με την Αρχή της Συστολής, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $y \in E$

έτσι ώστε y = Ty, δηλαδή

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \quad \text{για } x\in[x_0-r,\ x_0+r].$$

Το μοναδικό σταθερό σημείο y της συστολής T είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο $[x_0-r, x_0+r]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας είναι* f: $[x_0, x_0+a] \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ *μία συνεχής συνάρτηση που πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (με σταθερά* $K > 0$*), όπου* $x_0 \in \mathbf{R}$, $a > 0$ *και* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ή* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι C το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_0, x_0+a]$ και με τιμές στον $\mathbf{K}^n$. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις φ και ψ στο C, ας ορίσουμε

$$\varrho(\varphi,\psi) = \sup_{x_0\leq x\leq x_0+a}\left[e^{-L(x-x_0)}|\varphi(x)-\psi(x)|\right],$$

όπου L είναι μία σταθερά με L > K. Τότε ϱ είναι (απόδειξη;) μία μετρική στο C, δηλαδή (C,ϱ) είναι ένας μετρικός χώρος. Ο μετρικός χώρος (C,ϱ) είναι (απόδειξη;) πλήρης.

Περαιτέρω, για τυχούσα συνάρτηση φ∈C, ας ορίσουμε

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \quad \text{για } x\in[x_0,\ x_0+a].$$

Έτσι, έχει ορισθεί μία απεικόνιση T: C→ C.

Για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στον C, έχουμε για όλα τα $x\in[x_0, x_0+a]$

$$|(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))]dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \leq K\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|dt$$

$$= K\int_{x_0}^{x} e^{L(t-x_0)}\left[e^{-L(t-x_0)}|\varphi(t) - \psi(t)|\right]dt$$

$$\leq K \int_{x_0}^{x} e^{L(t-x_0)} \Big\{ \sup_{x_0 \leq s \leq x_0+a} \left[e^{-L(s-x_0)} |\varphi(s)-\psi(s)| \right] \Big\} dt$$

$$= K \Big[\int_{x_0}^{x} e^{L(t-x_0)} dt \Big] \varrho(\varphi,\psi) = \frac{K}{L} \left(e^{L(x-x_0)} - 1 \right) \varrho(\varphi,\psi)$$

$$\leq \frac{K}{L} e^{L(x-x_0)} \varrho(\varphi,\psi),$$

δηλαδή

$$e^{-L(x-x_0)} |(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| \leq \frac{K}{L} \varrho(\varphi,\psi),$$

και επομένως

$$\varrho(T\varphi,T\psi) \equiv \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+a} \left[e^{-L(x-x_0)} |(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| \right] \leq \frac{K}{L} \varrho(\varphi,\psi).$$

Αλλά, είναι $\frac{K}{L} < 1$. Άρα, η απεικόνιση $T: C \to C$ είναι μία συστολή.

Από την Αρχή της Συστολής προκύπτει ότι η T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $y \in C$ τέτοια ώστε $y = Ty$, δηλαδή

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \quad \text{για } x \in [x_0, x_0+a].$$

Το σταθερό σημείο y της συστολής T είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$.

Με χρήση της Αρχής της Συστολής, αποδεικνύεται και το ακόλουθο Θεώρημα. Η απόδειξη αυτού θα παραλειφθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ας είναι* $f: [x_0, x_0+a] \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ *μία συνεχής συνάρτηση, όπου* $x_0 \in \mathbf{R}$, $a > 0$ *και* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ή* $\mathbf{C}$. *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής συνάρτηση* μ *στο διάστημα* $[x_0, x_0+a]$ *τέτοια ώστε*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq \mu(x)|y_1-y_2|$$

για κάθε $x \in [x_0, x_0+a]$ *και για όλα τα* $y_1, y_2 \in \mathbf{K}^n$. *Ας είναι ακόμα* $y_0 \in \mathbf{K}^n$.

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

έχει ακριβώς μία λύση y *στο διάστημα* $[x_0, x_0+a]$, *η οποία είναι τέτοια ώστε, για κάθε συνεχή συνάρτηση* $\varphi: [x_0, x_0+a] \to \mathbf{K}^n$, *να ισχύει*

$$|\varphi(x)-y(x)| \leq [M(x)]^2 \sup_{t\in[x_0,x_0+a]} \left[\left| \varphi(t)-y_0 - \int_{x_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \right| / M(t) \right]$$

για όλα τα $x\in[x_0, x_0+a]$, *όπου*

$$M(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} \mu(t)dt \right] \quad \text{για } x\in[x_0, x_0+a].$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Ας συμβολίσουμε με C το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων φ: $[x_0, x_0+a]\to \mathbf{K}^n$. Για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στο C, ορίζουμε

$$\varrho(\varphi,\psi) = \sup_{x_0\leq x\leq x_0+a} [|\varphi(x)-\psi(x)| / M(x)].$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ϱ: $C^2 \to [0, \infty)$ είναι μία μετρική στο C και ότι ο μετρικός χώρος (C,ϱ) είναι πλήρης. Περαιτέρω, για τυχούσα συνάρτηση $\varphi\in C$, ορίζουμε

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \quad \text{για } x\in[x_0, x_0+a].$$

Να αποδειχθεί ότι ο τύπος αυτός ορίζει μία συστολή T: C $\to$ C. Τέλος, να αποδειχθεί ότι το μοναδικό σταθερό σημείο της T είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$.

ΘΕΜΑ IV
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ: ΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΛΥΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Το ακόλουθο Λήμμα είναι γνωστό ως *Λήμμα του Gronwall* (βλ. [T.H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. Math.* **20** (1918), 292-296]).

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ GRONWALL. *Ας είναι* u *και* v *δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα κλειστό αριστερά διάστημα* J *με αριστερό άκρο* x_0. *Ακόμα, ας είναι* M *μία πραγματική σταθερά και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση* v *είναι μη αρνητική στο* J. *Αν*

$$u(x) \leq M + \int_{x_0}^{x} v(t)u(t)dt \quad \textit{για κάθε } x \in J,$$

τότε

$$u(x) \leq M \exp\left[\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right] \quad \textit{για όλα τα } x \in J.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} v(t)u(t)dt, \quad x \in J,$$

οπότε είναι

$$u(x) \leq M+z(x) \quad \text{για } x \in J,$$

και έτσι παίρνουμε για κάθε $x \in J$

$$z'(x) = v(x)u(x) \leq v(x)[M+z(x)] = Mv(x)+v(x)z(x)$$

ή

$$z'(x)-v(x)z(x) \leq Mv(x)$$

ή ακόμα

$$[z'(x)-v(x)z(x)]\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right] \leq Mv(x)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right].$$

Άρα

$$\left\{ z(x)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right]\right\}' \leq Mv(x)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right] \quad \text{για κάθε } x\in J$$

και επομένως για όλα τα $x\in J$

$$z(x)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right] \leq M\int_{x_0}^{x} v(s)\exp\left[-\int_{x_0}^{s} v(t)dt\right]ds = -M\exp\left[-\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right]+M$$

ή

$$z(x) \leq -M + M\exp\left[\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right].$$

Έτσι, έχουμε για τυχόν $x\in J$

$$u(x) \leq M+z(x) \leq M\exp\left[\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right].$$

Με μία μέθοδο, που είναι ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Λήμματος του Gronwall, θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* u *και* v *δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα κλειστό δεξιά διάστημα* J *με δεξιό άκρο* x_0. *Ακόμα, ας είναι* M *μία πραγματική σταθερά και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση* v *είναι μη αρνητική στο* J. *Αν*

$$u(x) \leq M + \int_{x}^{x_0} v(t)u(t)dt \quad \textit{για κάθε } x\in J,$$

τότε

$$u(x) \leq M\exp\left[\int_{x}^{x_0} v(t)dt\right] \quad \textit{για όλα τα } x\in J.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας ορίσουμε

$$z(x) = \int_{x}^{x_0} v(t)u(t)dt \quad \text{για } x\in J,$$

οπότε θα είναι

$$u(x) \leq M+z(x) \quad \text{για κάθε } x\in J.$$

Τότε, για τυχόν $x \in J$, έχουμε

$$z'(x) = -v(x)u(x) \geq -v(x)[M+z(x)] = -Mv(x)-v(x)z(x)$$

ή

$$z'(x)+v(x)z(x) \geq -Mv(x)$$

και επομένως

$$[z'(x)+v(x)z(x)]\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right] \geq -Mv(x)\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right].$$

Έτσι, είναι

$$\left\{ z(x)\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right]\right\}' \geq -Mv(x)\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right] \quad \text{για } x \in J.$$

Άρα, για όλα τα $x \in J$, παίρνουμε

$$-z(x)\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right] \geq -M\int_x^{x_0} v(s)\exp\left[-\int_s^{x_0} v(t)dt\right]ds$$

$$= -M + M\exp\left[-\int_x^{x_0} v(t)dt\right]$$

ή

$$-z(x) \geq -M\exp\left[\int_x^{x_0} v(t)dt\right] + M$$

ή ακόμα

$$z(x) \leq M\exp\left[\int_x^{x_0} v(t)dt\right] - M.$$

Τέλος, για κάθε $x \in J$, λαμβάνουμε

$$u(x) \leq M+z(x) \leq M\exp\left[\int_x^{x_0} v(t)dt\right],$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος.

Ένας συνδυασμός του Λήμματος του Gronwall με το παραπάνω Λήμμα οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο Λήμμα, το οποίο είναι γνωστό ως *Λήμμα του Reid* (βλ. [W.T. Reid, Properties of solutions of an infinite system of ordinary linear differential equations of the first order with auxiliary boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **32** (1930), 284-318; see p. 296]).

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ REID. *Ας είναι* u *και* v *δύο συνεχείς μη αρνητικές* *συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Ακόμα, ας είναι* $x_0 \in I$ *και* M *μία πραγματική σταθερά. Αν*

$$u(x) \leq M + \left| \int_{x_0}^{x} v(t)u(t)dt \right| \quad \text{για κάθε } x\in I,$$

τότε

$$u(x) \leq M \exp\left[\left| \int_{x_0}^{x} v(t)dt \right| \right] \quad \text{για όλα τα } x\in I.$$

Με χρήση του Λήμματος του Reid, θα αποδειχθεί το ακόλουθο στοιχειώδες Θεώρημα συνεχούς εξάρτησης των λύσεων από τις αρχικές τιμές για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ας είναι* Ω *ένας τόπος του* $\mathbf{R} \times \mathbf{K}^n$ *με* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ή* $\mathbf{C}$ *και έστω* $f: \Omega \to \mathbf{K}^n$ *μία συνεχής συνάρτηση που πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά* $K \geq 0$ *στον τόπο* Ω. *Ακόμα, ας είναι* I *ένα διάστημα με* $I \subseteq pr_1\Omega$, x_0 *ένα σημείο του* I, *και* $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbf{K}^n$.

Αν y *και* $\tilde{y}$ *είναι δύο λύσεις επί του* I *της διαφορικής εξίσωσης*

$$y' = f(x,y)$$

με

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{και} \quad \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0,$$

τότε ισχύει

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{K|x-x_0|} \quad \text{για όλα τα } x\in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x\in I$, παίρνουμε

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \right] - \left[\tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\tilde{y}(t))dt \right] \right|$$

$$\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,\tilde{y}(t))dt \right|$$

$$= |y - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} [f(t,y(t)) - f(t,\tilde{y}(t))]dt \right|$$

$$\leq |y - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,y(t)) - f(t,\tilde{y}(t))|dt \right|$$

$$\leq |y-\tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} K|y(t)-\tilde{y}(t)|dt \right|.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Reid, παίρνουμε για όλα τα $x\in I$

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq |y-\tilde{y}_0| \exp\left(\left| \int_{x_0}^{x} K dt \right| \right) = |y-\tilde{y}_0| e^{K|x-x_0|}$$

και έτσι έχει αποδειχθεί το Θεώρημά μας.

ΘΕΜΑ V
ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Το παρακάτω Λήμμα είναι μία βελτιωμένη μορφή ενός συμπεράσματος που οφείλεται στον Landau (βλ. [E. Landau, Über einen Satz von Herrn Esclangon, *Math. Ann.* **102** (1930), 177-188] καθώς και [W.A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath, Boston, 1965, p. 140]). Για μία γενίκευση του Λήμματος αυτού παραπέμπουμε στο Άρθρο [Ch. G. Philos and V.A. Staikos, Asymptotic properties of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating argument, *Pacific J. Math.* **70** (1977), 221-242].

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* h *μία* n*-φορές, όπου* $n > 1$, *παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση επί ενός διαστήματος* I *της πραγματικής ευθείας και ας υποθέσουμε ότι*

$$|h(x)| \leq K \quad \textit{και} \quad |h^{(n)}(x)| \leq M \quad \textit{για κάθε } x \in I,$$

όπου K *και* M *είναι θετικές σταθερές.*

Αν L *είναι το μήκος του διαστήματος* I *και*

(i) *το* I *είναι κλειστό και* $L \geq 2(K/M)^{1/n}$

ή

(ii) $L > 2(K/M)^{1/n}$,

τότε

$$|h^{(j)}(x)| \leq c_n K^{1-j/n} M^{j/n} \quad \textit{για όλα τα } x \in I \quad (j = 1,2,\ldots,n-1),$$

όπου

$$c_n \equiv 2^{2^n-2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα στην περίπτωση όπου το (i) ισχύει. Πραγματικά, αν ισχύει το (ii), τότε για τυχόν $x \in I$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα κλειστό υποδιάστημα J του I με μήκος $L^* \geq 2(K/M)^{1/n}$ και τέτοιο ώστε $x \in J$, οπότε μία εφαρμογή του Λήμματος για το κλειστό διάστημα J οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ισχύει

$$|h^{(j)}(x)| \leq c_n K^{1-j/n} M^{j/n} \quad (j = 1,2,\ldots,n-1).$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύει το (i) και ορίζουμε

$$S = \max\left\{ c_n,\ \max_{1\le j\le n-1}\ \max_{x\in I} \frac{|h^{(j)}(x)|}{K^{1-j/n}M^{j/n}} \right\}.$$

Είναι φανερό ότι για κάθε $j = 0,1,...,n-1$

$$1 \le 2^{2^{j+1}-2} \le 2^{2^n-2} \equiv c_n \le S.$$

Έτσι, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ισχύει

(1) $$(4S)^{\gamma_j} \le S \quad \text{με } \gamma_j = 1-2^{-j} \quad (j = 0,1,...,n-1).$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι για $j = 0,1,...,n-1$

(2) $$|h^{(j)}(x)| \le (4S)^{\gamma_j} K^{1-j/n}M^{j/n} \equiv K_j \quad \text{για κάθε } x\in I.$$

Πραγματικά, η (2) πληρούται για $j = 0$, επειδή

$$|h(x)| \le K = K_0 \quad \text{για κάθε } x\in I.$$

Υποθέτουμε ότι η (2) ισχύει για $j = m$, $0 \le m< n-1$, δηλαδή ότι είναι

(3) $$|h^{(m)}(x)| \le K_m \quad \text{για κάθε } x\in I.$$

Για αυτό το m έχουμε

(4) $$|h^{(m+2)}(x)| \le SK^{1-(m+2)/n}M^{(m+2)/n} \equiv M_m \quad \text{για κάθε } x\in I,$$

το οποίο, λόγω του τρόπου ορισμού του S, είναι προφανές όταν $m < n-2$ και έπεται από την ανισότητα

$$|h^{(n)}(x)| \le M \le MS = M_{n-2} \quad \text{για κάθε } x\in I,$$

όταν $m = n-2$. Επειδή, λόγω της (1),

$$\left(\frac{K_m}{M_m}\right)^{1/2} \le \left(\frac{K}{M}\right)^{1/n}$$

και επειδή ισχύει το (i), υπάρχουν x_1, x_2 στο I με $x_2-x_1 = 2(K_m/M_m)^{1/2}$ και $x_1 \le x_0 \le x_2$, όπου το x_0 είναι τέτοιο ώστε

$$|h^{(m+1)}(x_0)| = \max_{x\in I} |h^{(m+1)}(x)|.$$

Σύμφωνα με τον Τύπο του Taylor, έχουμε

$$h^{(m)}(x_2)-h^{(m)}(x_0) = (x_2-x_0)h^{(m+1)}(x_0) + \frac{1}{2}(x_2-x_0)^2h^{(m+2)}(\xi)$$

και

$$h^{(m)}(x_1)-h^{(m)}(x_0) = (x_1-x_0)h^{(m+1)}(x_0) + \frac{1}{2}(x_1-x_0)^2h^{(m+2)}(\eta),$$

όπου ξ και η είναι δύο σημεία με $x_1 \le \eta \le x_0 \le \xi \le x_2$. Αφαιρώντας την δεύτερη ισότητα από την πρώτη, παίρνουμε

$$h^{(m)}(x_2)-h^{(m)}(x_1) = (x_2-x_1)h^{(m+1)}(x_0) + \frac{1}{2}\left[(x_2-x_0)^2h^{(m+2)}(\xi)-(x_1-x_0)^2h^{(m+2)}(\eta)\right]$$

και επομένως

$$|h^{(m+1)}(x_0)|(x_2-x_1) = \left|h^{(m)}(x_2)-h^{(m)}(x_1) - \frac{1}{2}\left[(x_2-x_0)^2h^{(m+2)}(\xi)-(x_1-x_0)^2h^{(m+2)}(\eta)\right]\right|$$

$$\leq |h^{(m)}(x_2)|+|h^{(m)}(x_1)| + \frac{1}{2}\,[(x_2-x_0)^2|h^{(m+2)}(\xi)|+(x_1-x_0)^2|h^{(m+2)}(\eta)|].$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις (3) και (4), έχουμε

$$|h^{(m+1)}(x_0)| \leq \frac{1}{x_2-x_1}\left\{2K_m + \frac{M_m}{2}\,[(x_2-x_0)^2+(x_1-x_0)^2]\right\}$$

$$\leq \frac{1}{x_2-x_1}\left[2K_m + \frac{M_m}{2}\,(x_2-x_1)^2\right]$$

$$= \frac{2K_m}{x_2-x_1} + \frac{M_m}{2}\,(x_2-x_1)$$

$$= 2(K_mM_m)^{1/2}.$$

Αλλά, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$2(K_mM_m)^{1/2} = K_{m+1},$$

οπότε

$$|h^{(m+1)}(x_0)| \leq K_{m+1},$$

το οποίο αποδεικνύει την (2) για $j = m+1$. Άρα, η (2) πληρούται για όλους τους δείκτες $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Από την (2) προκύπτει ότι

$$\max_{1\leq j\leq n-1}\ \max_{x\in I} \frac{|h^{(j)}(x)|}{K^{1-j/n}M^{j/n}} \leq (4S)^{\gamma_{n-1}}.$$

Επίσης, είναι

$$c_n \equiv 2^{2^n-2} = (4c_n)^{\gamma_{n-1}} \leq (4S)^{\gamma_{n-1}}.$$

Επομένως, λόγω του τρόπου ορισμού του S,

$$S \leq (4S)^{\gamma_{n-1}},$$

το οποίο δίνει

$$S \leq 2^{2^n-2} \equiv c_n$$

και άρα $S = c_n$.

Τέλος, από τον τρόπο ορισμού του S προκύπτει ότι

$$|h^{(j)}(x)| \leq c_nK^{1-j/n}M^{j/n} \quad \text{για κάθε } x\in I \quad (j = 1,2,\ldots,n-1).$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την n-τάξης ($n > 1$) γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y' +a_0y = b,$$

όπου a_i ($i = 0,1,\ldots,n-1$) *και* b *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* $[x_0, \infty)$.

Με χρήση του Λήμματος, θα αποδειχθεί το παρακάτω Θεώρημα για τις λύσεις της (E).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις* a_i ($i = 0,1,\ldots,n-1$) *και* b *είναι φραγμένες στο διάστημα* $[x_0, \infty)$ *και ας είναι* y *μία πραγματική λύση της* *γραμμικής διαφορικής εξίσωσης* (E).

Αν η y *είναι φραγμένη στο* $[x_0, \infty)$, *τότε και οι παράγωγοι* $y^{(k)}$ $(k = 1,2,...,n)$ *αυτής είναι φραγμένες στο* $[x_0, \infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι η λύση y είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_0, \infty)$, δηλαδή ότι υπάρχει μία θετική σταθερά K τέτοια ώστε

$$|y(x)| \leq K \quad \text{για κάθε } x \geq x_0.$$

Επειδή οι συναρτήσεις a_0 και b καθώς και η λύση y είναι φραγμένες συναρτήσεις στο $[x_0, \infty)$, από τη διαφορική εξίσωση (E) προκύπτει αμέσως ότι και η συνάρτηση $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'$ είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_0, \infty)$. Έτσι, για κάποια σταθερά $C > 0$, θα έχουμε

$$|a_i(x)| \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq x_0 \quad (i = 1,...,n-1)$$

και

$$|y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_1(x)y'(x)| \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq x_0 . \tag{5}$$

Έστω, τώρα, ένα τυχόν x^* με $x^* \geq x_0+2K^{1/n}$ και ας θέσουμε

$$M = \max\left\{1, \max_{x_0 \leq x \leq x^*} |y^{(n)}(x)|\right\}.$$

Είναι $M \geq 1$ και

$$|y^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, x^*].$$

Ακόμα, το μήκος του διαστήματος $[x_0, x^*]$ είναι $L = x^*-x_0 \geq 2K^{1/n} \geq 2(K/M)^{1/n}$.

Έτσι, εφαρμόζοντας το Λήμμα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει για $j = 1,2,...,n-1$

$$|y^{(j)}(x)| \leq c_nK^{1-j/n}M^{j/n} \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, x^*],$$

όπου $c_n \equiv 2^{2^n-2}$. Άρα,

$$|y^{(j)}(x)| \leq c_nK^{1-j/n}M^{(n-1)/n} \quad \text{για όλα τα } x \in [x_0, x^*] \quad (j = 1,2,...,n-1). \tag{6}$$

Από την (5) παίρνουμε για $x \in [x_0, x^*]$

$$\begin{aligned} |y^{(n)}(x)| &\leq C + \sum_{j=1}^{n-1} |a_j(x)||y^{(j)}(x)| \\ &\leq C + Cc_n\left(\sum_{j=1}^{n-1} K^{1-j/n}\right) M^{(n-1)/n} \\ &\leq Cc_n\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} K^{1-j/n}\right) M^{(n-1)/n}, \end{aligned}$$

αφού $c_n \geq 1$ και $M \geq 1$. Θέτοντας

$$N = \max\left\{1, Cc_n\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} K^{1-j/n}\right)\right\},$$

έχουμε

$$|y^{(n)}(x)| \leq NM^{(n-1)/n} \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, x^*]. \tag{7}$$

Άρα, είναι

$$\max_{x_0 \le x \le x^*} |y^{(n)}(x)| \le NM^{(n-1)/n}.$$

Επίσης, αφού $M \ge 1$ και $N \ge 1$, ισχύει

$$1 \le NM^{(n-1)/n}.$$

Έτσι, από τον τρόπο ορισμού του M προκύπτει αμέσως ότι

$$M \le NM^{(n-1)/n}$$

και επομένως

$$M \le N^n \quad ή \quad M^{(n-1)/n} \le N^{n-1}.$$

Από τις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι, για όλα τα $x \in [x_0, x^*]$, είναι

$$|y^{(j)}(x)| \le c_n N^{n-1} K^{1-j/n} \quad (j = 1,2,\ldots,n-1)$$

και

$$|y^{(n)}(x)| \le N^n.$$

Επειδή το N είναι ανεξάρτητο του x^*, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις $y^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ είναι φραγμένες στο διάστημα $[x_0+2K^{1/n}, \infty)$. Τότε είναι φανερό ότι οι $y^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ είναι επίσης φραγμένες σε ολόκληρο το διάστημα $[x_0, \infty)$, λόγω της συνέχειας αυτών στο διάστημα $[x_0, x_0+2K^{1/n}]$.

Έτσι, έχει αποδειχθεί το Θεώρημά μας.

ΘΕΜΑ VI
ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Θα ασχοληθούμε εδώ με ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα με περιοδικούς συντελεστές, παρουσιάζοντας ορισμένα συμπεράσματα που είναι παράλληλα προς αντίστοιχα συμπεράσματα για ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές. Η Θεωρία που θα αναπτυχθεί είναι γνωστή ως *Θεωρία του Floquet* (βλ. [G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2) **12** (1883), 47-89]).

Έστω το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$(S_0) \qquad y' = Ay,$$

όπου A *είναι ένας* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση που είναι συνεχής στην πραγματική ευθεία* **R**. Θα υποθέτουμε ότι *ο συντελεστής πίνακας* A *είναι περιοδικός με περίοδο* $\omega > 0$, *δηλαδή ότι υπάρχει* $\omega > 0$ *έτσι ώστε*

$$A(x+\omega) = A(x) \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

Το ακόλουθο Λήμμα από τη Θεωρία Πινάκων θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

ΛΗΜΜΑ. *Για οποιονδήποτε* n-*τάξης τετραγωνικό πίνακα* C *με* $\det C \neq 0$, *υπάρχει ένας (όχι μονοσήμαντα ορισμένος)* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας* K *τέτοιος ώστε*

$$C = e^K.$$

Με τη βοήθεια του Λήμματος αυτού, θα αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο δίνει μία αξιοσημείωτη παράσταση ενός βασικού πίνακα του (περιοδικού) ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και το οποίο δίνει τη δυνατότητα για την εισαγωγή δύο χρήσιμων εννοιών (της έννοιας του χαρακτηριστικού πολλαπλασιαστή του A και της έννοιας του χαρακτηριστικού εκθέτη του A). Το Θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως *Θεώρημα του Floquet.*

ΘΕΩΡΗΜΑ A. *Έστω* Y *ένας βασικός πίνακας του* (S_0). *Τότε ο πίνακας-*

συνάρτηση Z *με*

$$Z(x) = Y(x+\omega) \quad \text{για } x \in \mathbf{R}$$

είναι επίσης ένας βασικός πίνακας του (S_0). *Επιπλέον, υπάρχουν ένας (όχι μονοσήμαντα ορισμένος) συνεχώς παραγωγίσιμος* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση* P *στην πραγματική ευθεία* $\mathbf{R}$, *που είναι περιοδικός με περίοδο* ω *και τέτοιος ώστε* $\det P(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$, *καθώς και ένας (όχι μονοσήμαντα ορισμένος) σταθερός* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας* R *έτσι ώστε*

$$Y(x) = P(x)e^{xR} \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x \in \mathbf{R}$, έχουμε

$$Z'(x) = Y'(x+\omega) = A(x+\omega)Y(x+\omega) = A(x)Z(x),$$

δηλαδή είναι $Z' = AZ$. Επίσης, ισχύει

$$\det Z(x) = \det Y(x+\omega) \neq 0 \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα, ο Z είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0). Επομένως, υπάρχει ένας σταθερός n-τάξης τετραγωνικός πίνακας C με $\det C \neq 0$ τέτοιος ώστε

$$Y(x+\omega) \equiv Z(x) = Y(x)C \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Από το Λήμμα έπεται ότι υπάρχει ένας σταθερός n-τάξης τετραγωνικός πίνακας R έτσι ώστε $C = e^{\omega R}$. Τότε

(1) $$Y(x+\omega) = Y(x)e^{\omega R} \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

Ας θέσουμε

$$P(x) = Y(x)e^{-xR} \quad \text{για } x \in \mathbf{R},$$

οπότε θα είναι

$$Y(x) = P(x)e^{xR} \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

Ο P είναι ένας συνεχώς παραγωγίσιμος n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση στο $\mathbf{R}$. Είναι

$$\det P(x) = [\det Y(x)](\det e^{-xR}) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Επίσης, ο P είναι περιοδικός με περίοδο ω, αφού για $x \in \mathbf{R}$ είναι

$$P(x+\omega) = Y(x+\omega)e^{-(x+\omega)R} = Y(x)Ce^{-(x+\omega)R} = Y(x)e^{\omega R}e^{-(x+\omega)R}$$
$$= Y(x)e^{[\omega-(x+\omega)]R} = Y(x)e^{-xR} = P(x).$$

Έτσι, έχει αποδειχθεί το Θεώρημά μας.

Τώρα, έστω Y ένας βασικός πίνακας του (S_0) και ας είναι P και R όπως στο Θεώρημα A.

Αν Y^* είναι επίσης ένας βασικός πίνακας του (S_0), τότε

$$Y = Y^*T$$

για κάποιον σταθερό n-τάξης τετραγωνικό πίνακα T με $\det T \neq 0$. Αλλά, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος A, έχουμε ότι ισχύει η (1). Από την (1) παίρνουμε

$$Y^*(x+\omega)T = Y^*(x)Te^{\omega R} \text{ για } x\in\mathbf{R}$$

ή ακόμα

(2) $$Y^*(x+\omega) = Y^*(x)(Te^{\omega R}T^{-1}) \text{ για όλα τα } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα, κάθε βασικός πίνακας Y^* του (S_0) ορίζει έναν πίνακα $Te^{\omega R}T^{-1}$ που είναι όμοιος με τον πίνακα $e^{\omega R}$.

Αντίστροφα, αν T είναι ένας σταθερός n-τάξης τετραγωνικός πίνακας με $\det T \neq 0$, τότε υπάρχει ένας βασικός πίνακας Y^* του (S_0) έτσι ώστε να πληρούται η (2). Πραγματικά, ας ορίσουμε

$$Y^* = YT^{-1}.$$

Ο Y^* είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0). Περαιτέρω, από την (1) προκύπτει ότι για $x\in\mathbf{R}$

$$Y(x+\omega)T^{-1} = Y(x)e^{\omega R}T^{-1} \equiv [Y(x)T^{-1}](Te^{\omega R}T^{-1})$$

και επομένως ισχύει η (2).

Μετά από τα παραπάνω μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι, παρότι ο βασικός πίνακας Y του (S_0) δεν ορίζει μονοσήμαντα τον πίνακα R, εντούτοις το σύνολο όλων των βασικών πινάκων του (S_0) ορίζει μονοσήμαντα όλες τις ποσότητες που αντιστοιχούν στον $e^{\omega R}$ και οι οποίες είναι αναλλοίωτες σε έναν μετασχηματισμό ομοιότητας. Ειδικά, το σύνολο όλων των βασικών πινάκων του (S_0) ορίζει ένα ακριβώς σύνολο αριθμών που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $C = e^{\omega R}$. Έτσι, οδηγούμεθα στον ακόλουθο Ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω Y ένας βασικός πίνακας του (S_0) και ας είναι P και R όπως στο Θεώρημα Α. Οι ιδιοτιμές του πίνακα $C = e^{\omega R}$ ορίζονται μονοσήμαντα από τον συντελεστή πίνακα A (και είναι μη μηδενικές, αφού το γινόμενό τους είναι ίσο με $\det C \neq 0$) και λέμε ότι είναι οι *χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές* του πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του R καλούνται *χαρακτηριστικοί εκθέτες* του A.

Θα δώσουμε τώρα, χωρίς απόδειξη, ένα σημαντικό συμπέρασμα που περιέχεται στην ακόλουθη Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω* Y *ένας βασικός πίνακας του* (S_0) *και ας είναι* P *και* R *όπως στο Θεώρημα* Α.

Τότε λ_0 *είναι ένας χαρακτηριστικός πολλαπλασιαστής του πίνακα* A *με πολλαπλότητα* m, *όπου* $1 \leq m \leq n$, *ως ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου του* $C = e^{\omega R}$ *αν και μόνο αν υπάρχει ένας χαρακτηριστικός εκθέτης* ϱ *του* A *μ ε πολλαπλότητα* m *ως ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου του* R *έτσι ώστε*

$$\lambda = e^{\omega\varrho}.$$

Το ακόλουθο Θεώρημα αποδεικνύει ότι υπάρχει μία (περιοδική) αλλαγή της άγνωστης συνάρτησης τέτοια ώστε να μετασχηματίζει το (S_0) σε ένα ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ B. *Έστω* Y *ένας βασικός πίνακας του* (S_0) *και ας είναι* P *και* R *όπως στο Θεώρημα* A.

Τότε η αντικατάσταση $z = P^{-1}y$ *μετασχηματίζει το* (S_0) *στο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

$$z' = Rz.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος A, είναι

$$P(x) = Y(x)e^{-xR} \text{ για κάθε } x\in \mathbf{R}.$$

Έτσι, για οποιοδήποτε $x\in \mathbf{R}$, έχουμε

$$P'(x) = Y'(x)e^{-xR}+Y(x)(e^{-xR})' = A(x)Y(x)e^{-xR}-Y(x)e^{-xR}R$$

και άρα ισχύει

$$P' = AP-PR.$$

Τώρα, παίρνουμε

$$APz = Ay = y' = (Pz)' = P'z+Pz' =(AP-PR)z+Pz' = APz-PRz+Pz'$$

και επομένως

$$Pz' = PRz \text{ ή ισοδύναμα } z' = Rz.$$

Τέλος, έστω Y ένας βασικός πίνακας του (S_0) και ας είναι P και R όπως στο Θεώρημα A. Τότε

$$Y(x) = P(t)e^{xR} \text{ για όλα τα } x\in \mathbf{R}.$$

O P είναι περιοδικός με περίοδο ω. Αυτό συνεπάγεται ότι και ο πίνακας-συνάρτηση P^{-1} είναι επίσης περιοδικός με περίοδο ω. Άρα, οι πίνακες-συναρτήσεις P και P^{-1} είναι φραγμένοι σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία **R**. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο βασικός πίνακας Y είναι φραγμένος για $x \geq 0$ αν και μόνο αν ο e^{xR} είναι φραγμένος για $x \geq 0$ καθώς επίσης και ότι είναι $\lim_{x\to\infty} Y(x) = O$ αν και μόνο αν ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^{xR} = O$. Μετά από τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ακόλουθο κριτήριο σχετικά με την ευστάθεια και την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του (περιοδικού) ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ C. *Έστω* Y *ένας βασικός πίνακας του* (S_0) *και ας είναι* P *και* R *όπως στο Θεώρημα* A. *Τότε*:

(i) Η μηδενική λύση του (S_0) *είναι ευσταθής αν και μόνο αν όλοι οι χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές του* A *έχουν μέτρα μικρότερα ή ίσα του* 1 *και επιπλέον εκείνοι που έχουν μέτρα ίσα με* 1 *είναι απλές ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου του* $C = e^{\omega R}$ *ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν όλοι οι χαρακτηριστικοί εκθέτες του* A *έχουν πραγματικά μέρη μικρότερα ή ίσα του* 0 *και επιπλέον εκείνοι που έχουν πραγματικά μέρη ίσα με* 0 *είναι απλές ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου του* R.

(ii) Η μηδενική λύση του (S_0) *είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν όλοι οι χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές του* A *έχουν μέτρα μικρότερα του* 1 *ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν όλοι οι χαρακτηριστικοί εκθέτες του* A *έχουν πραγματικά μέρη μικρότερα του* 0.

ΘΕΜΑ VII
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ PUTZER

Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S_0) $$y' = Ay,$$

όπου A *είναι ένας σταθερός* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας.*

Θα αποδειχθεί πρώτα το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *(όχι αναγκαστικά διακεκριμμένες) και* σ *ένας πραγματικός αριθμός με* $\sigma > \max\limits_{1 \le i \le n} \mathrm{Re}\lambda_i$. *Τότε υπάρχει μία σταθερά* $K > 0$ *τέτοια ώστε*

$$|e^{xA}| \le Ke^{\sigma x} \quad \textit{για όλα τα } x \ge 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε τη λύση $r_1, r_2, \dots, r_n$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, \quad r_i' = r_{i-1} + \lambda_i r_i \quad (i = 2, \dots, n) \\ r_1(0) = 1, \quad r_i(0) = 0 \quad (i = 2, \dots, n). \end{cases}$$

Θα αποδειχθεί, πρώτα, ότι υπάρχουν θετικές σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ έτσι ώστε

$$|r_i(x)| \le c_i e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Πραγματικά, έχουμε

$$r_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{για } x \ge 0$$

και

$$r_i(x) = e^{\lambda_i x} \int_0^x e^{-\lambda_i t} r_{i-1}(t)dt \quad \text{για } x \ge 0 \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Είναι

$$|r_1(x)| = |e^{\lambda_1 x}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda_1)x} \le e^{\sigma x} \equiv c_1 e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \ge 0,$$

όπου $c_1 = 1$. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία θετική σταθερά c_{i-1} έτσι ώστε

$$|r_{i-1}(x)| \le c_{i-1} e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \ge 0,$$

όπου i είναι ένας τυχών δείκτης από το σύνολο δεικτών $\{2, \dots, n\}$. Τότε, για όλα τα $x \ge 0$, έχουμε

$$|r_i(x)| = \left| e^{\lambda_i x} \int_0^x e^{-\lambda_i t}\, r_{i-1}(t)dt \right| \leq |e^{\lambda_i x}| \int_0^x |e^{-\lambda_i t}|\, |r_{i-1}(t)|dt$$

$$= e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)x} \int_0^x e^{-(\mathrm{Re}\lambda_i)t}\, |r_{i-1}(t)|dt \leq c_{i-1}\, e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)x} \int_0^x e^{(\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i)t}\, dt$$

$$= \frac{c_{i-1}}{\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i}\, e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)x}\, [e^{(\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i)x}-1] < \frac{c_{i-1}}{\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i}\, e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)x} \cdot e^{(\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i)x}$$

$$= \frac{c_{i-1}}{\sigma-\mathrm{Re}\lambda_i}\, e^{\sigma x}.$$

Έτσι, θέτοντας $c_i = c_{i-1}/\,(\sigma\text{-}\mathrm{Re}\lambda_i) > 0$, παίρνουμε

$$|r_i(x)| \leq c_i e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Αποδείχθηκε λοιπόν ο ισχυρισμός μας.

Τώρα, θέτουμε

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} (A-\lambda_j I) \quad (k = 1,\ldots,n-1),$$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Putzer, είναι

$$e^{xA} = r_1(x)I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(x)P_k \quad \text{για } x\in \mathbf{R}.$$

Έτσι, για όλα τα $x \geq 0$, έχουμε

$$|e^{xA}| \leq |r_1(x)|\, |I| + \sum_{k=1}^{n-1} |r_{k+1}(x)|\, |P_k| \leq \left(c_1|I| + \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1}\, |P_k| \right) e^{\sigma x}.$$

Από αυτό προκύπτει το ζητούμενο με

$$K = c_1\, |I| + \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1}\, |P_k| > 0.$$

Τώρα, με τη χρησιμοποίηση του παραπάνω Λήμματος, θα αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα για την ασυμπτωτική ευστάθεια του (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η μηδενική λύση του* (S_0) *είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν όλες οι ιδιοτιμές του* A *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε έναν αρνητικό αριθμό σ που να είναι μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του A. Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχει μία σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε

$$|e^{xA}| \leq K e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Επειδή $\sigma < 0$, προκύπτει αμέσως ότι

$$\lim_{x\to\infty} |e^{xA}| = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Επίσης, πάλι με τη χρησιμοποίηση του παραπάνω Λήμματος, θα αποδειχθεί η ακόλουθη Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ας θεωρήσουμε το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

(S) $$y' = Ay+b,$$

όπου b *είναι μία συνεχής* n-*διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα* $[0, \infty)$. *Ας υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του* A *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Ισχύουν:*

(i) *Αν* $\int_0^\infty |b(x)|dx < \infty$, *τότε όλες οι λύσεις του* (S) *είναι φραγμένες.*

(ii) *Αν* $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, *τότε όλες οι λύσεις του* (S) *τείνουν στο 0 για* $x\to\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι σ ένας αρνητικός αριθμός μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του A. Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχει μία σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε

$$|e^{xA}| \leq Ke^{\sigma x} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Οι λύσεις του αντιστοίχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

(S_0) $$y' = Ay$$

δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = e^{xA}y(0) \quad \text{για } x\in\mathbf{R}.$$

Αλλά, αφού $\sigma < 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} |e^{xA}| = 0.$$

Έτσι, αμέσως διαπιστώνουμε ότι όλες οι λύσεις του (S_0) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$ και συνεπώς είναι φραγμένες στο $[0, \infty)$.

Μία μερική λύση του (S) είναι

$$y_\mu(x) = e^{xA}\int_0^x e^{-tA}b(t)dt \quad \text{για } x \geq 0.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η y_μ είναι φραγμένη, όταν $\int_0^\infty |b(x)|dx < \infty$, και ότι η y_μ τείνει στο μηδέν για $x\to\infty$, όταν $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι

$$\int_0^\infty |b(x)|dx < \infty .$$

Τότε, για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$|y_\mu(x)| = \left| e^{xA} \int_0^x e^{-tA} b(t)dt \right| = \left| \int_0^x e^{(x-t)A} b(t)dt \right|$$

$$\leq \int_0^x |e^{(x-t)A}|\,|b(t)|dt \leq K \int_0^x e^{\sigma(x-t)}\,|b(t)|dt$$

$$\leq K \int_0^x |b(t)|dt \leq K \int_0^\infty |b(t)|dt < \infty$$

και άρα η y_μ είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$.

Έστω, τώρα, ότι ισχύει

$$\lim_{x \to \infty} b(x) = 0.$$

Για όλα τα $x \geq 0$, παίρνουμε

$$|y_\mu(x)| = \left| e^{xA} \int_0^x e^{-tA} b(t)dt \right| = \left| \int_0^x e^{(x-t)A} b(t)dt \right|$$

$$\leq \int_0^x |e^{(x-t)A}|\,|b(t)|dt \leq K \int_0^x e^{\sigma(x-t)}\,|b(t)|dt$$

$$= Ke^{\sigma x} \int_0^x e^{-\sigma t}\,|b(t)|dt.$$

Επομένως,

$$|y_\mu(x)| \leq K \frac{\int_0^x e^{-\sigma t}\,|b(t)|dt}{e^{-\sigma x}} \qquad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Αλλά, επειδή $\sigma < 0$ και $\lim_{x \to \infty} |b(x)| = 0$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x e^{-\sigma t}\,|b(t)|dt}{e^{-\sigma x}} = 0.$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to \infty} y_\mu(x) = 0.$$

ΘΕΜΑ VIII
ΔΥΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(*) $$y' = Ay,$$

όπου A *είναι ένας σταθερός* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας*. Ας θεωρήσουμε επίσης το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(**) $$z' = (A+C)z,$$

όπου C *είναι ένας συνεχής* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση στο διάστημα* $[0, \infty)$.

Στα παρακάτω δύο Θεωρήματα θα δοθούν συνθήκες για τον πίνακα-συνάρτηση C, έτσι ώστε η ευστάθεια ή η ασυμπτωτική ευστάθεια του (*) να συνεπάγεται αντίστοιχα την ευστάθεια ή την ασυμπτωτική ευστάθεια του (**). Για την απόδειξη των Θεωρημάτων αυτών θα πρέπει να γίνει χρήση του ακολούθου Λήμματος που είναι γνωστό ως *Λήμμα του Gronwall.*

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* u *και* v *δύο συνεχείς μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα* $[x_0, \infty)$, *τέτοιες ώστε*

$$u(x) \leq M + \int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds \quad \textit{για κάθε } x \geq x_0,$$

όπου M *είναι μία μη αρνητική σταθερά. Τότε*

$$u(x) \leq M \exp\left[\int_{x_0}^{x} v(s)ds\right] \quad \textit{για όλα τα } x \geq x_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε, πρώτα, ότι $M > 0$. Τότε, για κάθε $x \geq x_0$, έχουμε

$$\frac{u(x)}{M + \int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds} \leq 1$$

και επομένως

$$\frac{u(x)v(x)}{M+\int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds} \le v(x)$$

ή

$$\frac{\left[M+\int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds\right]'}{M+\int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds} \le v(x).$$

Έτσι, παίρνουμε για $x \ge x_0$

$$\log\left[M+\int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds\right] - \log M \le \int_{x_0}^{x} v(s)ds$$

και συνεπώς

$$M+\int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds \le M\exp\left[\int_{x_0}^{x} v(s)ds\right],$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $M = 0$. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί να αποδειχθεί ότι $u(x) = 0$ για $x \ge x_0$. Έστω τυχόν (αλλά ορισμένο) $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$u(x) < \varepsilon + \int_{x_0}^{x} u(s)v(s)ds \quad \text{για κάθε } x \ge x_0.$$

Άρα, αφού $\varepsilon > 0$, θα είναι

$$u(x) \le \varepsilon \exp\left[\int_{x_0}^{x} v(s)ds\right] \quad \text{για όλα τα } x \ge x_0.$$

Για $\varepsilon \to 0+0$, παίρνουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας υποθέσουμε ότι το (*) είναι ευσταθές. Αν*

$$\int_0^\infty |C(x)|dx < \infty,$$

τότε το (**) είναι ομοίως ευσταθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή το (*) είναι ευσταθές, υπάρχει μία σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε

$$|e^{xA}| \le K \quad \text{για όλα τα } x \ge 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$\int_0^\infty |C(x)|dx < \infty.$$

Για να αποδείξουμε ότι το (**) είναι ευσταθές, αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι λύσεις αυτού είναι φραγμένες στο $[0, \infty)$. Ας είναι, λοιπόν, z μία (τυχούσα) λύση του (**). Τότε

$$z(x) = e^{xA}z(0) + e^{xA}\int_0^x e^{-sA}C(s)z(s)ds \quad \text{για } x \geq 0.$$

Έτσι, για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$|z(x)| = \left| e^{xA}z(0) + \int_0^x e^{(x-s)A}C(s)z(s)ds \right|$$

$$\leq |e^{xA}|\,|z(0)| + \int_0^x |e^{(x-s)A}|\,|C(s)|\,|z(s)|ds$$

$$\leq K|z(0)| + \int_0^x K|C(s)|\,|z(s)|ds.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα του Gronwall,

$$|z(x)| \leq K|z(0)|\exp\left[\int_0^x K|C(s)|ds\right] \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Αυτό δίνει

$$|z(x)| \leq K|z(0)|\exp\left[K\int_0^\infty |C(s)|ds\right] < \infty \quad \text{για κάθε } x \geq 0,$$

που σημαίνει ότι η λύση z είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, \infty)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας υποθέσουμε ότι το (*) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Υπάρχει σταθερά* $\varepsilon_0 > 0$ *έτσι ώστε, αν* $|C(x)| \leq \varepsilon_0$ *για όλα τα* $x \geq 0$, *τότε το (**) να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού το (*) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, θα είναι και ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. Άρα, θα υπάρχουν σταθερές $K > 0$ και $\mu > 0$ έτσι ώστε

$$|e^{(x-s)A}| \leq Ke^{-\mu(x-s)} \quad \text{για όλα τα } x, s \text{ με } x \geq s \geq 0.$$

Ειδικά, ισχύει

$$|e^{xA}| \leq Ke^{-\mu x} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Θεωρούμε έναν αριθμό ε_0 με $0 < \varepsilon_0 < \mu/K$ και υποθέτουμε ότι

$$|C(x)| \leq \varepsilon_0 \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το (**) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αρκεί, προς τούτο, να αποδείξουμε ότι όλες οι λύσεις του (**) τείνουν στο μηδέν για $x \to \infty$. Ας είναι, λοιπόν, z μία (τυχούσα) λύση του (**). Τότε είναι

$$z(x) = e^{xA}z(0) + e^{xA} \int_0^x e^{-sA}C(s)z(s)ds \quad \text{για } x \geq 0.$$

Για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$|z(x)| = \left| e^{xA}z(0) + \int_0^x e^{(x-s)A}C(s)z(s)ds \right|$$

$$\leq |e^{xA}|\,|z(0)| + \int_0^x |e^{(x-s)A}|\,|C(s)|\,|z(s)|ds$$

$$\leq Ke^{-\mu x}|z(0)| + \int_0^x Ke^{-\mu(x-s)}\varepsilon_0\,|z(s)|ds.$$

Επομένως, ισχύει

$$e^{\mu x}|z(x)| \leq K|z(0)| + \int_0^x K\varepsilon_0\, e^{-\mu s}|z(s)|ds \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Από το Λήμμα του Gronwall προκύπτει ότι για όλα τα $x \geq 0$

$$e^{\mu x}|z(x)| \leq K|z(0)|\exp\left[\int_0^x K\varepsilon_0 ds\right] = K|z(0)|e^{K\varepsilon_0 x}.$$

Έτσι, έχουμε

$$|z(x)| \leq K|z(0)|e^{(K\varepsilon_0-\mu)x} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Επειδή $K\varepsilon_0-\mu < 0$, αυτό δίνει

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

ΘΕΜΑ IX
ΙΣΧΥΡΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ
ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S) $$y' = Ay+b,$$

όπου A *είναι ένας συνεχής* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση σε ένα διάστημα* $[x_0, \infty)$ *και* b *είναι μία συνεχής* n-*διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο* $[x_0, \infty)$. Ας θεωρήσουμε, επίσης, το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S_0) $$y' = Ay.$$

Μία λύση $\tilde{y}$ του (S) λέμε ότι είναι *ισχυρώς ευσταθής* αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S) τέτοια ώστε $|y(x_1)-\tilde{y}(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, να είναι

$$|y(x)- \tilde{y}(x)| < \varepsilon \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0.$$

Είναι φανερό ότι, αν μία λύση $\tilde{y}$ του (S) είναι ισχυρώς ευσταθής, τότε αυτή είναι και ομοιόμορφα ευσταθής (και άρα και ευσταθής).

Θα λέμε ότι το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S) είναι *ισχυρώς ευσταθές* αν και μόνο αν όλες οι λύσεις αυτού είναι ισχυρώς ευσταθείς. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι *το γραμμικό διαφορικό σύστημα* (S) *είναι ισχυρώς ευσταθές αν και μόνο αν η μηδενική λύση του αντιστοίχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος* (S_0) *είναι ισχυρώς ευσταθής.*

Το ακόλουθο συμπέρασμα περιέχει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ισχυρή ευστάθεια της μηδενικής λύσης του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Η συνθήκη αυτή αναφέρεται σε έναν (τυχόντα) βασικό πίνακα του διαφορικού συστήματος (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας είναι* Y *ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος* (S_0). *Τότε η μηδενική λύση του* (S_0) *είναι ισχυρώς ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά* $K > 0$ *έτσι ώστε*

(*) $$|Y(x)| \leq K \quad \textit{και} \quad |Y^{-1}(x)| \leq K \quad \textit{για όλα τα } x \geq x_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (*), όπου K είναι μία θετική σταθερά. Αν ε είναι ένας θετικός αριθμός και $\delta = \varepsilon/K^2 > 0$, τότε, για κάθε λύση y του (S_0) τέτοια ώστε $|y(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, έχουμε

$$|y(x)| = |Y(x)Y^{-1}(x_1)y(x_1)| \leq |Y(x)|\,|Y^{-1}(x_1)|\,|y(x_1)| < K^2\delta = \varepsilon$$

για όλα τα $x \geq x_0$. Άρα η μηδενική λύση του (S_0) είναι ισχυρώς ευσταθής.

Αντίστροφα, ας είναι ισχυρώς ευσταθής η μηδενική λύση του (S_0). Τότε η μηδενική λύση του (S_0) είναι επίσης ευσταθής και επομένως, όπως είναι γνωστό, θα υπάρχει μία σταθερά $K_0 > 0$ έτσι ώστε

$$|Y(x)| \leq K_0 \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0.$$

Ακόμα, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, να είναι

$$|y(x)| < 1 \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0.$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα δ_1 με $0 < \delta_1 < \delta$, τότε

$$|Y(x)Y^{-1}(s)c| < 1 \quad \text{για κάθε } x \text{ και } s \text{ με } x \geq x_0 \text{ και } s \geq x_0$$

για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c με $|c| = \delta_1$. Ειδικά, έχουμε

$$|Y(x_0)Y^{-1}(s)c| < 1 \quad \text{για κάθε } s \geq x_0$$

και επομένως

$$|Y^{-1}(s)c| < |Y^{-1}(x_0)| \quad \text{για } s \geq x_0$$

για οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα c με $|c| = \delta_1$. Άρα, για κάθε $s \geq x_0$

$$|Y^{-1}(s)| = \sup_{|\xi|=1} |Y^{-1}(s)\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|\xi|=1} |Y^{-1}(s)\delta_1\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|c|=\delta_1} |Y^{-1}(s)c| \leq \frac{1}{\delta_1} |Y^{-1}(x_0)|.$$

Έτσι, είναι

$$|Y^{-1}(s)| \leq K_1 \quad \text{για όλα τα } s \geq x_0,$$

όπου $K_1 = \frac{1}{\delta_1}|Y^{-1}(x_0)| > 0$. Επομένως, ισχύει η (*) με $K = \max\{K_0, K_1\} > 0$.

Ως μία συνέπεια του Θεωρήματος Α, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος* (S_0) *είναι ισχυρώς ευσταθής αν και μόνο αν αυτή είναι ευσταθής και, επιπλέον, υπάρχει πραγματική σταθερά* μ *τέτοια ώστε*

$$(**) \qquad \mathrm{Re} \int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds \geq \mu \quad \textit{για όλα τα } x \geq x_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0).

Από τον Τύπο του Jacobi παίρνουμε

$$\det Y(x) = \det Y(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x} trA(s)ds\right] \quad \text{για κάθε } x \geq x_0$$

και επομένως

$$|\det Y(x)| = |\det Y(x_0)|\exp\left[Re \int_{x_0}^{x} trA(s)ds\right] \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0.$$

Ας υποθέσουμε, πρώτα, ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής και επιπλέον υπάρχει πραγματική σταθερά μ τέτοια ώστε να ισχύει η (**). Αφού η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής, θα υπάρχει (όπως είναι γνωστό) μία σταθερά $K_0 > 0$ έτσι ώστε

$$|Y(x)| \leq K_0 \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0,$$

το οποίο σημαίνει ότι ο βασικός πίνακας Y είναι φραγμένος στο διάστημα $[x_0, \infty)$. Από την άλλη μεριά, έχουμε

$$|\det Y(x)| \geq |\det Y(x_0)|e^{\mu} > 0 \quad \text{για κάθε } x \geq x_0$$

και επομένως η συνάρτηση $1/\det Y$ είναι φραγμένη στο $[x_0, \infty)$. Είναι εύκολο τότε να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας-συνάρτηση Y^{-1} είναι φραγμένος στο $[x_0, \infty)$, δηλαδή υπάρχει μία σταθερά $K_1 > 0$ έτσι ώστε

$$|Y^{-1}(x)| \leq K_1 \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0.$$

Έτσι, ισχύει η (*) με $K = \max\{K_0, K_1\} > 0$ και επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Α, η μηδενική λύση του (S_0) είναι ισχυρώς ευσταθής.

Έστω, τώρα, ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ισχυρώς ευσταθής. Τότε αυτή είναι και ευσταθής. Επιπλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα Α, υπάρχει σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (*). Άρα, ο πίνακας-συνάρτηση Y^{-1} είναι φραγμένος στο διάστημα $[x_0, \infty)$ και επομένως και η συνάρτηση $1/\det Y = \det Y^{-1}$ είναι φραγμένη στο $[x_0, \infty)$. Υπάρχει, λοιπόν, μία θετική σταθερά σ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{|\det Y(x)|} \leq \sigma \quad \text{για } x \geq x_0.$$

Τότε έχουμε για $x \geq x_0$

$$\exp\left[Re \int_{x_0}^{x} trA(s)ds\right] = \frac{|\det Y(x)|}{|\det Y(x_0)|} \geq \frac{1}{\sigma|\det Y(x_0)|}.$$

Έτσι, προκύπτει

$$Re \int_{x_0}^{x} trA(s)ds \geq -\log[\sigma|\det Y(x_0)|] \equiv \mu \quad \text{για } x \geq x_0,$$

δηλαδή υπάρχει πραγματική σταθερά μ τέτοια ώστε να ισχύει η (**).

Ισχύει το ακόλουθο "αν και μόνο αν" κριτήριο για την ισχυρή ευστάθεια της μηδενικής λύσης ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος με σταθερό συντελεστή πίνακα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα* (S_0) *όπου ο συντελεστής πίνακας* A *είναι σταθερός. Τότε η μηδενική λύση του* (S_0) *είναι ισχυρώς ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη και είναι απλές ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου του πίνακα* A.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A με πολλαπλότητες $n_1,n_2,\ldots,n_s$ αντίστοιχα $(n_1+n_2+\ldots+n_s = n)$ και ας είναι

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

όπου $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$, το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Είναι γνωστό ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής αν και μόνο αν, για κάθε $i\in\{1,2,\ldots,s\}$, είναι $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0$ και επιπλέον $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ συνεπάγεται $m_i = 1$.

Περαιτέρω, για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\mathrm{Re}\int_0^x \mathrm{tr}A\,ds = (\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}A)x = \left(\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{s} n_i\lambda_i\right)x = \left(\sum_{i=1}^{s} n_i\mathrm{Re}\lambda_i\right)x.$$

Άρα, υπάρχει μία πραγματική σταθερά μ έτσι ώστε

$$\mathrm{Re}\int_0^x \mathrm{tr}A\,ds \geq \mu \quad \text{για όλα τα } x \geq 0$$

αν και μόνο αν ισχύει

$$\sum_{i=1}^{s} n_i\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0.$$

Η απόδειξη συμπληρώνεται με μία εφαρμογή του Πορίσματος.

ΘΕΜΑ Χ
ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΕΚΚΡΕΜΗ

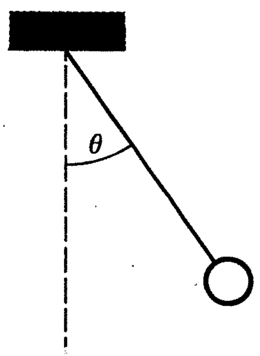
Ας θεωρήσουμε το απλό εκκρεμές του Σχήματος 1. Με την προϋπόθεση ότι οι ταλαντώσεις είναι μικρές, η κίνηση περιγράφεται από τις λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + m\omega_0^2\theta = 0.$$

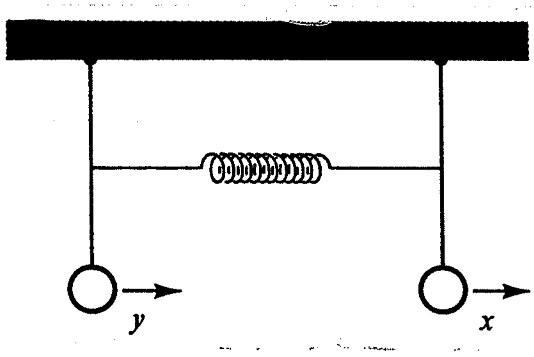
Η σταθερά m είναι η μάζα του εκκρεμούς και $\omega_0^2 = g/L$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και L είναι το μήκος του εκκρεμούς. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ και } \frac{d\theta}{dt}(0) = \upsilon_0,$$

όπου θ_0 είναι η αρχική γωνία του εκκρεμούς, δηλαδή η γωνία αυτού στο χρόνο t = 0, και υ_0 είναι η αρχική (γωνιακή) ταχύτητα του εκκρεμούς.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο εκκρεμή του ιδίου μήκους L και της αυτής μάζας m που είναι συζευγμένα με ένα ελατήριο (Σχήμα 2). Ας είναι x(t) και y(t) οι αντίστοιχες γωνίες στον χρόνο t. Η δράση του ελατηρίου συνίσταται στην εισαγωγή μίας δύναμης ανάλογης προς τη διαφορά των μετατοπίσεων, δηλαδή μίας δύναμης της μορφής k*(x-y), όπου k* είναι μία θετική σταθερά. Τότε η κίνηση περιγράφεται από τις λύσεις του διαφορικού συστήματος

$$(S) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = -k^*(x-y) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} + m\omega_0^2 y = -k^*(y-x) \end{cases}$$

όπου $\omega_0^2 = g/L$ (g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας). Ας θέσουμε

$$k = k^*/m \quad \text{και} \quad \omega_1 = \left(\omega_0^2 + 2k\right)^{1/2}.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \; \dfrac{dx}{dt}(0) = \upsilon_{10} \\ y(0) = y_0, \; \dfrac{dy}{dt}(0) = \upsilon_{20} \end{cases}$$

όπου x_0, y_0 είναι οι αρχικές γωνίες των εκκρεμών (οι γωνίες, δηλαδή, στον χρόνο $t = 0$) και υ_{10}, υ_{20} είναι οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες αυτών.

Αν θέσουμε

$$x_1 = x, \; x_2 = \frac{dx}{dt}; \quad y_1 = y, \; y_2 = \frac{dy}{dt},$$

τότε το διαφορικό σύστημα (S) ανάγεται στο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1 - kx_1 + ky_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\omega_0^2 y_1 - ky_1 + kx_1 \end{cases}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(\tilde{S}) \qquad \frac{dz}{dt} = Az,$$

όπου

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 - k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -\omega_0^2 - k & 0 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\pm i\omega_0 \quad \text{και} \quad \pm i\left(\omega_0^2+2k\right)^{1/2} \equiv \pm i\omega_1.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, αντίστοιχο της ιδιοτιμής $i\omega_0$ αυτού, είναι το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \\ 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, μία λύση του $(\tilde{S})$ είναι η συνάρτηση

$$e^{i\omega_0 t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \\ 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος αυτής της λύσης είναι επίσης λύσεις του $(\tilde{S})$. Έχουμε, λοιπόν, τις ακόλουθες δύο λύσεις του $(\tilde{S})$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ \omega_0\cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \\ \omega_0\cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ανάλογα, ένα ιδιοδιάνυσμα του A, αντίστοιχο της ιδιοτιμής $i\omega_1$ αυτού, είναι το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_1 \\ -1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix}$$

και επομένως μία λύση του $(\tilde{S})$ είναι η ακόλουθη:

$$e^{i\omega_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_1 \\ -1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Έχουμε τότε ως λύσεις του $(\tilde{S})$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης αυτής, δηλαδή έχουμε τις παρακάτω λύσεις του $(\tilde{S})$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1\sin(\omega_1 t) \\ -\cos(\omega_1 t) \\ \omega_1\sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1\cos(\omega_1 t) \\ -\sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1\cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Έτσι, ένας πίνακας λύσεων του $(\tilde{S})$ είναι

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) & -\omega_1\sin(\omega_1 t) & \omega_1\cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & -\cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) & \omega_1\sin(\omega_1 t) & -\omega_1\cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbf{R}.$$

Αμέσως βλέπουμε ότι

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & \omega_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -\omega_1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή $\det Z(0) = 4\omega_0\omega_1 > 0$, προκύπτει ότι Z είναι ένας βασικός πίνακας του $(\tilde{S})$. Όλες οι λύσεις του $(\tilde{S})$ δίνονται από τον τύπο

$$z(t) = Z(t)Z^{-1}(0)z(0) \quad \text{για} \quad t\in\mathbf{R}.$$

(i) Ας υποθέσουμε ότι $x_0 = y_0 = 1$ και $\upsilon_{10} = \upsilon_{20} = 0$. Τότε έχουμε την αρχική συνθήκη

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση z του $(\tilde{S})$ που πληροί αυτή την αρχική συνθήκη είναι

$$z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbf{R}$$

και επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$x(t) = y(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{για} \quad t\in\mathbf{R}.$$

Αυτή η λύση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega_0$ και αφορά την περίπτωση όπου η κίνηση των εκκρεμών είναι τέτοια ώστε το ελατήριο δεν είναι ποτέ τεντωμένο.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ και $\upsilon_{10} = \upsilon_{20} = 0$. Η λύση z του $(\tilde{S})$ που πληροί την αρχική συνθήκη

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι

$$z(t) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

και επομένως εδώ έχουμε

$$x(t) = -\cos(\omega_1 t),\ t \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad y(t) = \cos(\omega_1 t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Αυτή η λύση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega_1$. Η κίνηση των εκκρεμών είναι ακριβώς αντίθετη. Επειδή $\omega_1 > \omega_0$, συμπεραίνουμε ότι το ελατήριο επενεργεί ώστε τα εκκρεμή να ταλαντούνται γρηγορότερα.

(iii) Ας είναι $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ και $\upsilon_{10} = \upsilon_{20} = 0$. Η αρχική συνθήκη για το $(\tilde{S})$ είναι

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και η λύση z του $(\tilde{S})$ που πληροί αυτή την αρχική συνθήκη είναι η ακόλουθη:

$$z(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_1 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Άρα, σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2}[\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)],\ t \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{1}{2}[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t)],\ t \in \mathbf{R}.$$

Αυτή η λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο περιοδικών συναρτήσεων, αλλά δεν είναι περιοδική εκτός αν η σταθερά k είναι τέτοια ώστε ω_1 να είναι ένα ρητό πολλαπλάσιο του ω_0.